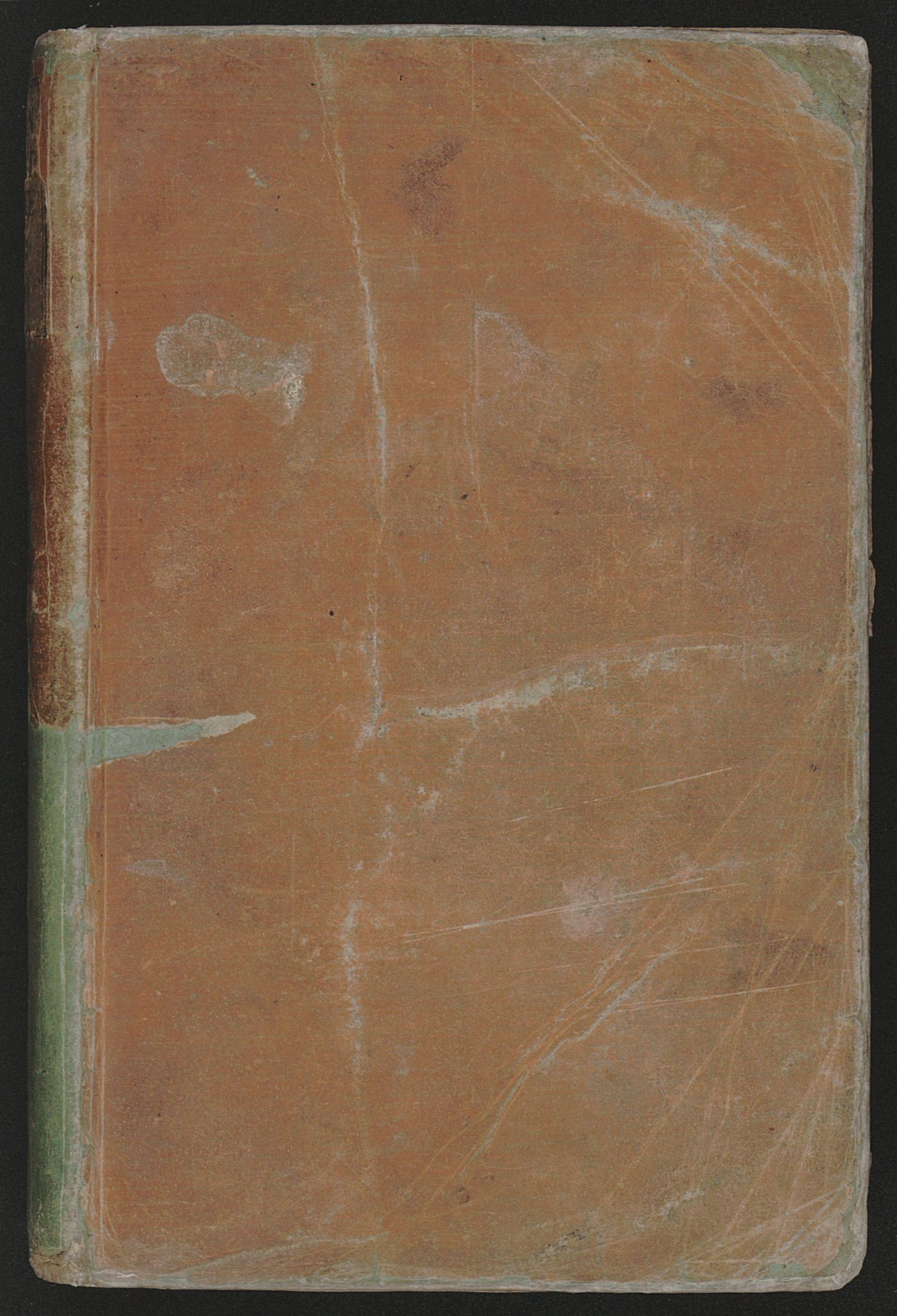
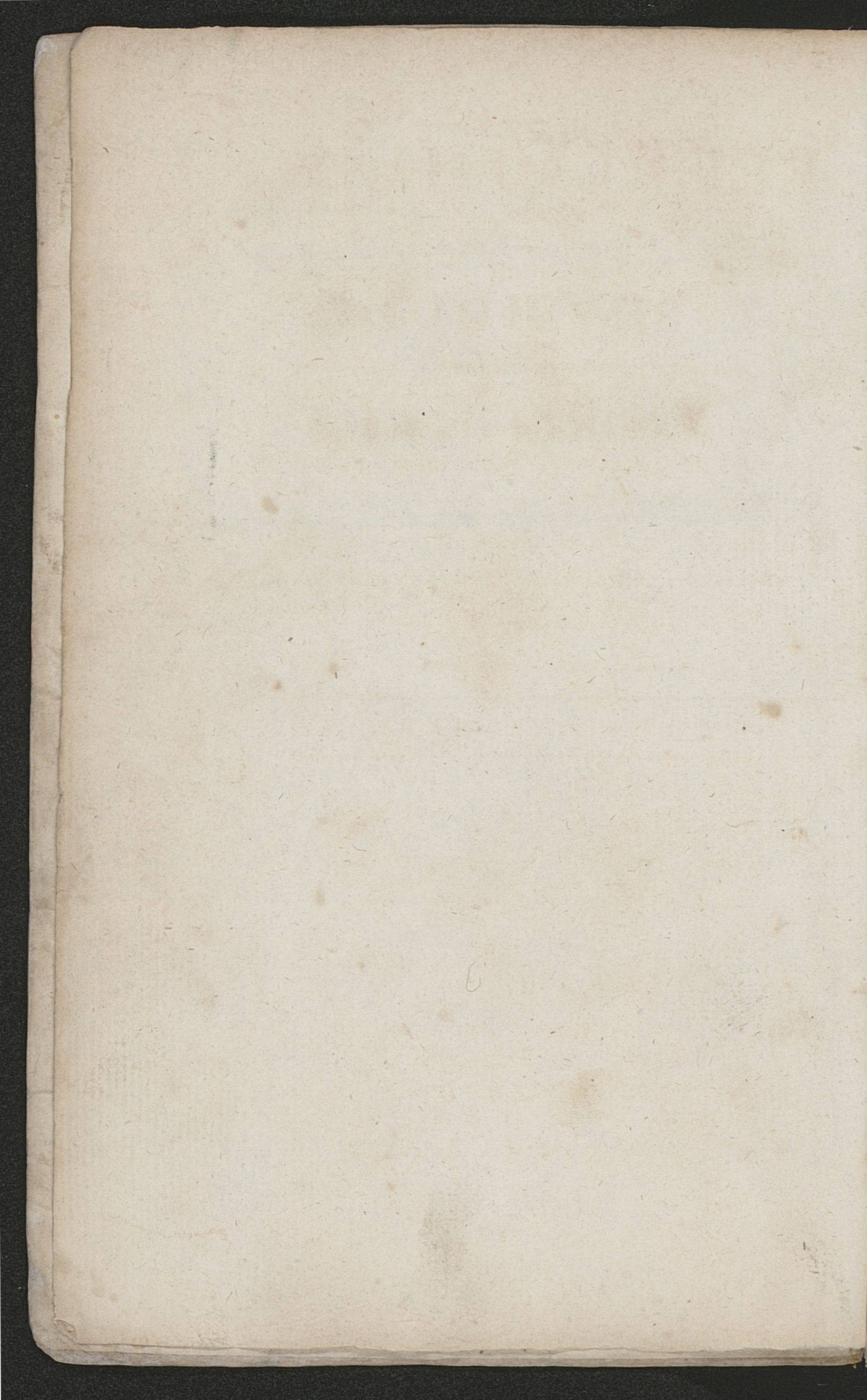


Pierre Mathieu Babert

484

460 —
les 4 vol.

136 planches h. t.
dont 9 dépl.
(2 bis dans les tomes 2 et 3)



RÉCRÉATIONS
MATHÉMATIQUES
ET PHYSIQUES,

QUI contiennent plusieurs problêmes d'arithmétique, de géométrie, de musique, d'optique, de gnomonique, de cosmographie, de méchanique, de pyrotechnie, & de physique ; avec un traité des horloges élémentaires.

Par feu M. OZANAM, de l'Académie Royale des Sciences, & Professeur en Mathématique.

NOUVELLE EDITION

Revue & corrigée avec soin.

TOME PREMIER.



A PARIS,
Chez CLAUDE-ANTOINE JOMBERT, Fils, Libraire, rue Dauphine.

M. DCC. LXX. [1770]

Avec Approbation, & Privilége du Roi.



PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre amé CHARLES-ANTOINE JOMBERT, notre Libraire à Paris, Nous a fait exposer qu'il desireroit faire imprimer & réimprimer des Ouvrages qui ont pour titre : *Œuvres de feu M. OZANAM, &c.* S'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce nécessaires. A CES CAUSES voulant favorablement traiter l'Exposant, nous lui avons permis & permettons par ces présentes, de faire imprimer & réimprimer lesdits ouvrages autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de dix années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes : Faisons défenses à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance ; comme aussi d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits ouvrages, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changemens ou autres, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts : à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression & réimpression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en beau papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modele sous le contre-scel des Présentes : que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10

Avril 1725, & qu'avant de les exposer en vente, les manuscrits & imprimés qui aura servi de copie à l'impression & réimpression desdits ouvrages, seront remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier de France le Sieur DE LA MOIGNON; & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires de chacun dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle dudit sieur DE LA MOIGNON, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier, Vice-Chancelier & Garde des Sceaux de France, le sieur DE MAUPEOU: le tout à peine de nullité des Présentes; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant, ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin desdits ouvrages, soit tenue pour duement signifiée; & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secretaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire, pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires; CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris, le premier jour du mois de Février, l'an de grace mil sept cent soixante-quatre, & de notre regne le cinquante-neuvieme. Par le Roi en son Conseil.

LE BEGUE.

Regiſtré sur le regiſtre XVI de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 115, fol. 61, conformément aux réglemens de 1723. A Paris, le 6 Février 1764.

LE BRETON, Syndic.

AVERTISSEMENT

Sur cette nouvelle édition des Récréations Mathématiques.

DANS un ſiecle auſſi éclairé, où tout publie l'utilité & inſpire l'amour des Mathématiques, & où l'étude de cette ſcience fait partie de l'éducation, nous nous croyons diſpenſés de faire l'éloge de M. Ozanam, dont le mérite eſt ſi univerſellement reconnu. Cet homme célebre par ſes grandes connoiſſances, a trouvé le ſecret d'amuſer en inſtruiſant, & de rendre aimable une ſcience auſſi abſtraite, en la mettant à la portée de tout le monde dans ſes Récréations Mathématiques. *L'utile & l'agréable qui s'y trouvent ſi heureuſement réunis, la multiplicité des éditions ſont des témoins non ſuſpects de la bonté de cet Ouvrage, qui commençoit à devenir rare depuis quelques années; & malgré le nombre infini d'exemplaires qui en ont été conſommés, on le recherche toujours avec le même empreſſement. Toutes ces rai-*

ſons nous ont déterminé à préſenter au Public cette nouvelle édition, corrigée avec la plus grande exactitude. L'accueil favorable qu'il a bien voulu faire aux précédentes éditions, nous eſt d'un heureux préſage pour celle-ci, à laquelle on a apporté tous les ſoins pour la rendre plus correcte & plus digne de ſa bienveillance.





PRÉFACE.

JE ne m'excuſerai pas de ce qu'après avoir donné au Public des traités ſérieux, qui demandent toute l'application des lecteurs, il ſemble que je veuille diſſiper leur application, & les en détourner par les jeux d'eſprit que je leur préſente dans ces derniers volumes. La mémoire des grands hommes qui ont fait la même choſe que j'entreprends, eſt ſi glorieuſe, que leur exemple vaut toutes les juſtifications que je pourrois apporter. Le docte Bachet, ſieur de Méziriac, célebre par ſes excellens ouvrages, commença à ſe faire connoître dans la république des lettres par un recueil qu'il intitula, *Problêmes plaiſans, qui ſe font par les nombres.* Il voulut par ce livre s'aſſurer de ſon talent, & du jugement du public, avant que de mettre au jour ſes commentaires ſur l'arithmétique de Diophante, & les autres livres qui lui ont acquis une gloire immortelle. Pluſieurs autres auteurs de ce ſiecle, comme le fameux Pere Kircher, & les Peres Schot & Bertin n'ont pas moins fait de

bruit dans le monde ſavant, par les problêmes divertiſſans qu'ils ont mis dans leurs ouvrages, que par leurs raiſonnemens, & par leurs plus ſérieuſes obſervations.

Quoique ces grands exemples puiſſent ſuffire pour autoriſer mon deſſein, néanmoins afin que ces hommes illuſtres, que j'ai pris pour garans, ne ſoient pas eux-mêmes expoſés à la cenſure de ceux qui voudroient les accuſer de nouveauté, je produirai des exemples bien plus anciens, qui font voir que de tout tems les plus grands hommes ont tenu la même conduite, s'étant bien apperçus que le même fond de raiſon qui fait trouver du plaiſir dans l'admiration, en doit auſſi faire trouver dans les choſes qui font le ſujet de l'admiration.

Le commerce d'énigmes que les rois de Syrie entretenoient, & qui a fait durer ſi long-tems après eux le ſtile parabolique, n'étoit autre choſe que des jeux d'eſprit, & des entretiens également propres à exciter le plaiſir, & à donner de l'élévation à l'eſprit. Les grands de ce tems-là étoient faits comme ceux d'aujourd'hui, la peine les rebutoit; c'étoit un coup de l'adreſſe & de l'habileté extraordimaire de ceux qui les vouloient

inſtruire, que de les attacher à l'étude & à la réflexion, par le plaiſir & par la curioſité. Je ne doute pas que l'éducation que Nathan donna à Salomon par cet exercice, n'ait beaucoup contribué à cette élévation d'ame, & à cette ſageſſe merveilleuſe qui fait le caractere & la gloire de ce prince.

C'étoit auſſi par maniere de divertiſſement que les Chaldéens & les Egyptiens qui ont inventé l'aſtronomie, marquoient par avance à leurs amis les jours & les circonſtances des éclipſes, & qu'ils leur traçoient des figures qui partageoient la durée des jours, qui montroient les routes des étoiles, & qui repréſentoient toutes les variétés des mouvemens des cieux; perſuadés, auſſi bien que les Grecs, que les premiers plaiſirs de l'eſprit ſont ceux que l'on emprunte des mathématiques, dans leſquels ils faiſoient élever leurs enfans. Ils croyoient que ſi la raiſon des enfans étoit ſans action, elle n'étoit pas néanmoins ſans force, & qu'il n'y avoit qu'à lui donner du mouvement pour la perfectionner: ce qui ſe pouvoit faire, en donnant aux enfans de la curioſité, qui fait en eux ce qu'une longue ſuite de néceſſités de la vie fait dans les perſonnes d'un âge plus avancé. C'eſt là le ſecret de

Socrate, qui tiroit des enfans des résolutions les plus difficiles de la géométrie & de l'arithmétique; c'étoit la clef avec laquelle il leur ouvroit l'esprit, il connoissoit leurs forces, il présidoit à leur destinée : c'étoit le démon ou le génie qu'il consultoit, & qui ne le quittoit jamais.

Bien que les jeux d'esprit, dont je parle, soient des amusemens, ils ne sont peut-être pas moins utiles que les exercices auxquels on applique les jeunes personnes de qualité, pour façonner leurs corps, & pour leur donner le bon air : car s'accoutumer à connoître les proportions, la force des mêlanges, à connoître le point qu'on cherche dans la confusion, à prendre de justes mesures dans les propositions les plus embrouillées & les plus surprenantes, c'est se faire l'esprit aux affaires, c'est s'armer contre les surprises, c'est se préparer à vaincre les difficultés imprévues; ce qui vaut bien autant que d'assurer sa démarche par les leçons des maîtres à danser, ou le ton de sa voix par celles des musiciens.

Ne faut il pas outre cela que l'on se délasse quelquefois? Et se peut-on délasser par des divertissemens que l'on méprise, ou dont on a honte? Un homme d'Etat

voudroit-il danser au sortir du Conseil & des plus grandes affaires? Seroit-il bienséant qu'il fût trouvé dans les exercices où il passoit son tems dans sa jeunesse? La bienséance, les affaires, & la santé ne le permettent pas. Mais les jeux d'esprit sont de toutes les saisons & de tous les âges; ils instruisent les jeunes, ils divertissent les vieux, ils conviennent aux riches, & ne sont pas au-dessus de la portée des pauvres; les deux sexes s'en peuvent accommoder sans choquer la bienséance.

Ceux qui ont eu la curiosité d'épier la conduite des grands hommes dans leur particulier, ont trouvé qu'ils se sont distingués dans leurs divertissemens comme dans leur sérieux. Auguste jouoit les soirs avec sa famille à des jeux d'esprit; il ne croyoit pas cela au-dessous de lui; il écrivoit avec autant d'exactitude le détail de ses divertissemens que celui des affaires sérieuses. Le savant jurisconsulte Mucius Scevola, après avoir répondu à ceux qui le venoient consulter, se divertissoit à jouer aux échets, & étoit devenu un des meilleurs joueurs de son tems. Le pape Léon X, l'un des plus grands hommes de son siecle, jouoit aussi quelquefois aux échets, si l'on en croit Paul Jove, pour se délasser de la fatigue des affaires.

Il eſt certain que le jeu des échets a été inventé pour inſtruire, auſſi-bien que pour divertir ; en repréſentant les attaques & les défenſes des pieces différentes, leur marche, & leurs aventures, on a voulu faire des leçons de morale, & montrer par le déſaſtre du roi des échets, qu'un prince tombe immanquablement au pouvoir de ſes ennemis quand il s'eſt dépouillé de ſes ſoldats, & qu'il ne peut négliger la perte d'un ſeul de ſes ſujets, ſans s'expoſer à celle de ſes propres Etats.

On peut réduire tous les jeux qui ont été inventés, ou qu'on pourroit inventer, à trois claſſes différentes : la premiere eſt de ceux qui dépendent abſolument des nombres & des figures, comme les échets, le jeu des dames, & quelques autres : la ſeconde de ceux qui dépendent du haſard, comme les dez, & les jeux ſemblables : la troiſieme de ceux qui dépendent de la juſteſſe des mouvemens, comme les jeux de l'arquebuſe, de l'arc, de la paume, & du billard ; il y en a qui ſont mêlés d'adreſſe & de haſard, comme le trictac, le hocca, les cartes, & la plupart des autres. Mais il eſt conſtant qu'il n'y en a point qu'on ne puiſſe tellement ſoumettre aux regles des mathématiciens, que l'on ne fût aſſuré de gagner, ſi l'on y pouvoit

V. l'Eſſai d'analyſe ſur les jeux de

apporter toute l'habileté néceſſaire. Les jeux d'adreſſe ont tant de rapport aux principes de la ſtatique & de la mécanique, que ce n'eſt que faute d'en bien ſçavoir les regles, ou de les bien mettre en uſage, que l'on ne gagne pas dans ces jeux-là. Il n'y a point de jeux de haſard, où la victoire ne dépende de la rencontre d'un nombre, ou du poids, ou de l'étendue de la figure. Le joueur qui imprime le mouvement, pourroit déterminer la fin, s'il étoit parfaitement habile, & quoique cela ne paroiſſe pas poſſible, parce qu'on ne trouve perſonne d'une parfaite habileté, il eſt néanmoins vrai que l'on pourroit le faire, & qu'une méthode infaillible de gagner aux échets, n'eſt pas abſolument impoſſible; perſonne ne l'a encore trouvée, & je ne crois pas qu'on la trouve jamais, parce qu'elle dépend d'un trop grand nombre de combinaiſons. C'eſt aſſez qu'un point de perfection ſoit poſſible, pour engager les curieux au travail. L'orateur parfait, diſoit Cicéron, n'a jamais été; mais il eſt poſſible, ſon idée tel que ce grand maître l'a peint, ſert de modele à ceux qui ſe mettent en devoir de ſe rendre habiles en éloquence. Il en eſt de même du poëte, du peintre, de l'architecte, du médecin, & de tous les

hazard, par M. de Montmaur.

autres. Auſſi quoiqu'il ſoit vrai que perſonne ne ſçaura jamais la méthode immanquable de tous les jeux, ni peut-être d'aucun, néanmoins il ne faut pas laiſſer de s'y rendre le plus habile que l'on peut, en tâchant d'approcher de l'idée qu'on ſe fait de cette méthode, qui eſt enfermée dans l'exactitude des regles & des principes des mathématiques.

C'eſt une choſe bien extraordinaire, que de vouloir mettre les joueurs dans mon parti, & engager dans l'étude des récréations mathématiques les hommes d'état & les capitaines; mais puis-je empêcher tout le monde de profiter des leçons qui ſont établies ſur les principes les plus naturels, & ſur les vérités attachées à l'eſſence des choſes? Puis-je défendre des plaiſirs qui ſont engageans par leur utilité, & qui ſont ſi communs, ſi faciles & ſi propres à tous ceux qui ont de la raiſon, qu'on ne peut les ôter aux hommes, ſans les priver de ce qu'il y a de plus agréable dans la vie.

On croit depuis ſi long-tems qu'il y a eu quelque art ſecret entre les plus ſavans des Juifs, des Arabes, & des diſciples de cette ancienne académie qui tenoit en Egypte, où Moïſe fut élevé, & qui floriſſoit encore du tems de Salomon; que

cela a excité la curiosité des meilleurs esprits, pour découvrir ce qui en est : mais le moyen d'apprendre un art sans maître & sans livre ? Les savans de ces tems-là n'écrivoient point, ou s'ils écrivoient, c'étoient des énigmes & des discours si éloignés de ce qu'on attend, qu'on peut dire que leur silence est plus instructif que leurs discours.

Le Pere Schot dit qu'il y a trois sortes de cabales ; c'est le nom qu'il donne à cet art secret des Orientaux, celle des Rabins, celle de Raimond Lulle, & celle des Algebristes. Il ne peut dire ce que c'est que la premiere : les deux dernieres sont des jeux de nombres & de figures. Je ne doute pas que la premiere ne soit la même chose. Josephe, qui étoit prêtre, écrit hardiment que par le droit de sa naissance, il avoit été instruit dans tous les mysteres des Juifs, & qu'on lui avoit enseigné tous les secrets de leur art. Il se flatta par un esprit de cour, qui l'emporta par dessus sa conscience, d'avoir prédit par la force de cet art, l'élevation de Titus, qui fut empereur. Il cacha son jeu, comme un habile homme doit faire. Il soutient le personnage de merveilleux ; & quand il parle de l'aventure où il faillit à perdre la vie par le désespoir de ses soldats, résolus

de s'égorger les uns les autres, plutôt que de se rendre aux Romains, il attribue sa conservation, ou au hazard, ou à un miracle. Cependant il est à croire que Josephe ne fit ce miracle que par la science des nombres & des figures; il fit ranger ces désespérés de maniere que le sort tomba sur ceux que le capitaine voulut bien laisser périr. Il sauva sa vie parce qu'il étoit mathématicien, & non pas parce qu'il étoit lévite. Ce qui fait voir que les connoissances les plus abstraites se peuvent réduire en pratique, & qu'on peut mettre à quelque usage ce qui en paroît le plus éloigné.

V. page 248 du tome I.

Je m'étonne de ce que du tems des empereurs Dioclétien & Constantin, les loix défendirent les mathématiques, comme des connoissances dangereuses, en condamnant les mathématiciens & les sorciers aux mêmes peines, comme également criminels & pernicieux à la société civile, selon ce qui paroît par le titre 17 du livre 9 du code de Justinien. Je crois que c'est par l'ignorance qui regnoit en ce tems-là, & par le grand nombre des charlatans qui se servoient des mathématiques pour imposer & pour tromper la crédulité des ignorans. Mais il faut blâmer la stupidité de ceux qui se laissent

tromper, & il ne faut pas autoriſer la fainéantiſe de ceux qui ne veulent pas cultiver aſſez leur eſprit pour être en état de n'être jamais ſurpris. On a vu des états qui ont permis les ſoupleſſes, les petits larcins faits avec adreſſe, pour tenir les particuliers ſur leurs gardes, & pour les accoutumer à prendre toujours de bonnes précautions.

L'ignorance tient le monde dans une admiration perpétuelle & dans la méfiance, ce qui produit toujours une envie invincible de blâmer & de perſécuter ceux qui ſavent quelque choſe de plus que le commun, qui n'étant pas accoutumé à s'élever au-deſſus des choſes ſenſibles, & ne pouvant s'imaginer que la nature emploie des agens qui ne ſoient pas viſibles & palpables, attribue ſouvent aux ſorciers & aux démons tous les effets dont il ne connoît pas la cauſe. Je veux par mes récréations mathématiques, enſeigner tout le monde à faire ces ſorcelleries, qui faiſoient peur aux gens du conſeil de Juſtinien; & par-là je ferai plus qu'un ſavant homme*, qui s'eſt contenté du ſimple raiſonnement, pour défendre ſaint Thomas d'Aquin, Albert le Grand, Salomon, & pluſieurs autres grands hommes, qui n'ont été accuſés

* Gabriel Naudé.

d'être magiciens, que parce qu'ils sçavoient faire quelque chose de plus que les autres.

Un seul livre n'étant pas capable de contenir toutes les propositions qu'on peut faire sur cette matiere, on a divisé cet ouvrage en quatre volumes, où l'on donne les problêmes les plus faciles, les plus utiles & les plus agréables. Le premier contient les problêmes d'arithmétique, de géométrie, de musique & d'optique. Le second volume comprend les problêmes de gnomonique, de cosmographie & de mécanique. Le troisieme volume renferme les problêmes de pyrotechnie & de physique, avec un traité des horloges élémentaires. Le quatrieme & dernier volume ttaite des phosphores naturels & artificiels & des lampes sépulchrales des anciens. On y a joint un recueil des tours de gibeciere & de gobelets les plus connus & les plus récréatifs.



RECREATIONS MATHEMATIQUES ET PHYSIQUES.

Problêmes d'arithmétique.

COMME je ne prétends pas proposer des problêmes difficiles, je ne prétends pas aussi en donner les démonstrations, pour ne pas embarrasser le lecteur, que je veux divertir. Je me contenterai de donner la solution de ces problêmes par des regles qui ne sont sujettes à aucune erreur.

PROBLEME I.

Des religieuses sont retirées en huit cellules tellement disposées, qu'il y en a quatre dans les quatre coins du dortoir bâti en quarré, & chacune des quatre autres est au milieu de chaque côté. L'abbesse qu'on suppose aveugle, fait sa visite : elle compte le nombre des religieuses qui sont dans les trois

cellules d'un rang, elle trouve que le nombre des religieuſes d'un rang eſt égal à celui de chaque autre rang, en prenant pour un rang deux cellules des coins & celle du milieu. Cette abbeſſe fait une viſite, & compte dans chaque rang le même nombre de perſonnes que dans la premiere viſite, quoiqu'il y ſoit entré quatre hommes. Enfin dans la troiſieme viſite qu'elle fait, elle trouve encore dans chaque rang le même nombre de perſonnes qu'auparavant, quoique les quatre hommes ſoient ſortis, & qu'ils ayent emmené chacun une religieuſe.

JE ſuppoſe qu'il y ait d'abord trois religieuſes dans chaque cellule. L'abbeſſe en comptera neuf à chaque rang dans la premiere viſite qu'elle fera. Si enſuite une religieuſe ſort de chaque cellule du coin pour entrer avec un homme dans la cellule du milieu, qui eſt à ſa gauche, l'abbeſſe faiſant ſa ſeconde viſite, trouvera encore neuf perſonnes dans chaque rang du dortoir. Enfin ſi chahomme * emmene ſa religieuſe, & que deux religieuſes ſortant de chaque cellule du milieu, entrent dans l'une des cellules des coins qui eſt à leur droite, l'abbeſſe comptera dans une troiſieme viſite neuf perſonnes à chaque rang du dortoir.

REMARQUE.

On peut aiſément exécuter ce problême avec des jetons, & le pouſſer plus loin en faiſant faire une quatrieme viſite à l'abbeſſe, qui trouvera toujours neuf perſonnes à chaque rang du dortoir, quoique chaque religieuſe, qui étoit ſortie avec un homme,

* Qui étoit enfermé dans la cellule du milieu.

ſoit rentrée avec deux hommes. Avant cette quatrieme viſite, il faut faire paſſer de chaque cellule du coin trois religieuſes dans la cellule du milieu, où elles entreront avec leur compagne, qui y amenera deux hommes.

Ces figures feront connoître ſenſiblement ce qu'il y a à faire pour la ſolution de ce problême.

3	3	3
3		3
3	3	3

2	5	2
5		5
2	5	2

4	1	4
1		1
4	1	4

1	7	1
7		7
1	7	1

PROBLEME II.

On a mené ſur le bord d'une riviere un loup, une chevre & un chou. On propoſe à un batelier de les paſſer ſeul à ſeul, de maniere qu'en ſon abſence le loup ne faſſe aucun mal à la chevre, & que la chevre ne touche point au chou.

LE batelier commencera par paſſer la chevre, puis il retournera prendre le loup; quand il aura paſſé le loup, il ramenera la chevre qu'il

laiſſera à bord pour paſſer le chou du côté du loup. Enfin il retournera prendre la chevre, & la paſſera. Par ce moyen le loup ne ſe trouvera avec la chevre, ni la chevre avec le chou, qu'en la préſence du batelier.

PROBLEME III.

Trois maris jaloux ſe trouvent avec leurs femmes pendant une nuit fort obſcure au paſſage d'une riviere. Ils rencontrent un bateau ſans batelier. Ce bateau eſt ſi petit, qu'il ne peut porter que deux perſonnes à la fois. On demande comment ces ſix perſonnes paſſeront deux à deux, de ſorte qu'aucune femme ne demeure en la compagnie d'un ou de deux hommes, ſi ſon mari n'eſt préſent.

DEux femmes paſſeront d'abord, puis l'une ayant ramené le bateau, repaſſera avec la troiſieme femme. Enſuite l'une des trois femmes ramenera le bateau, & ſe mettant à terre, laiſſera paſſer les deux hommes dont les deux femmes ſont de l'autre côté. Alors un des hommes ramenera le bateau avec ſa femme, & la mettant à terre, il prendra le troiſieme homme, & repaſſera avec lui. Enfin la femme qui ſe trouve paſſée entrera dans le bateau, & ira chercher en deux fois les deux autres femmes.

On met ici quatre vers latins qui contiennent la ſolution de ce problême.

It duplex mulier, redit una, vehitque manentem;
Itque una, utuntur tunc duo puppe viri.
Par vadit & redeunt bini; mulierque ſororem
Advehit; ad propriam ſine maritus abit.

REMARQUE.

On propoſe encore ce problême ſous le titre de trois maîtres & de trois valets. Les maîtres s'accordent bien enſemble & les valets auſſi. Mais chaque maître ne peut ſouffrir les valets des deux autres maîtres ; de maniere que s'il ſe trouvoit avec l'un des deux valets en l'abſence de ſon maître, il ne manqueroit pas de le bien battre.

PROBLEME IV.

Faire l'addition d'une maniere particuliere, & qui ſoit inconnue à tout autre.

CEtte addition eſt pratiquée par les marchands qui ne ſe ſervent point de chiffres ordinaires, pour marquer le prix de leurs marchandiſes. Ils ſe font une arithmétique particuliere avec des lettres, ou tels autres caracteres qu'il leur plaît. Ils prennent, par exemple, ces dix lettres de notre alphabeth, b, o, n, e, f, a, c, i, u, s, auſquelles ils donnent la valeur des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Ainſi quand ils veulent marquer 11, ils déſignent ce nombre par bb. Quand ils veulent exprimer 59, ils le font par fu. Ils emploient ces lettres de la même maniere qu'on a coutume d'employer les chiffres ordinaires 1, 2, 3, &c. en ſorte que ces caracteres b, o, n, &c. étant à la premiere place à droite, ne marquent que des unités ; mais quand ils ſe trouvent à la deuxieme place, ils ſignifient des dixaines ; à la troiſieme ils expriment des centaines, & ainſi des autres ; de même que dans l'arithmétique, où nous nous ſervons de caracteres arabes,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.
b, o, n, e, f, a, c, i, u, s.

EXEMPLES.

11. 12. 13. 14. 24. 25. 36. 48. 59. 60. 112. &c.
bb. bo. bn. be. oe. of. na. ei. fu. af. bbo. &c.

PROBLEME V.

Souſtraire par une ſeule opération pluſieurs ſommes de pluſieurs ſommes données.

POur ôter toutes les ſommes d'en bas, qui ſont au-deſſous de la ligne en B, de toutes les ſommes d'en haut, qui ſont au-deſſous de la ligne en A, oncommencera à ajouter les nombres de la premiere colonne d'en bas à la droite, en diſant, 8 & 4 font 12, & 2 font 14, que l'on ôtera de la plus proche dixaine, c'eſt-à-dire, de deux dixaines, ou de 20 : le reſte ſera ajouté à la colonne correſpondante de deſſus, en diſant 6 & 8 font 14, & 2 font 16, & 4 font 20, & 3 font 23 ; il faudra écrire 3 au deſſous ; & parce qu'il y a ici deux dixaines comme auparavant, on ne retiendra rien. Ajoutez de la même façon les nombres de la colonne ſuivante d'en bas, en diſant o & 5 font 5, & 4 font 9, qu'on ôtera de la plus proche dixaine, ou de 10 : le reſte 1 ſera ajouté à la colonne correſpondante d'en haut, en diſant 1 & 4 font 5, & 5 font 10, & 6 font 16, & 4 font 20, il faudra écrire o au-deſſous, & parce qu'il y a ici deux dixaines, & que dans la colonne d'en bas il n'y en a eu qu'une, on re-

```
 56243
 84564 A
  3252
 26848
 ─────
  2942
  3654 B
  2308
 ─────
162003
```

tiendra la différence 1, qu'on ôtera de la colonne suivante d'en bas, à cause qu'on a trouvé plus de dixaines en A qu'en B; car il la faudroit ajouter si l'on avoit trouvé moins de dixaines en A qu'en B. Quand il arrivera que cette différence ne pourra être ôtée de la colonne d'en bas, pour n'y avoir point de figures significatives, comme il arrive ici a la cinquieme colonne, on l'ajoutera à la colonne d'en haut, & l'on écrira toute la somme audessous de la ligne, de sorte que dans cet exemple l'on aura 162003, pour le reste de la soustraction.

PROBLEME VI.

Multiplication abrégée.

POur multiplier un nombre quelconque, par exemple, 128 par un nombre qui soit produit par la multiplication de deux autres, comme par 24, qui est produit par la multiplication de ces deux 4, 6, ou de ces deux autres 3, 8; on multipliera le nombre proposé 128 par 4, & le produit 512 par 6: ou bien on multipliera le nombre proposé 128 par 3, & le produit 384 par 8, & l'on aura 3072 pour le produit de la multiplication qu'il falloit faire.

D'où il suit que pour multiplier un nombre proposé par un nombre quarré, il faut multiplier le nombre proposé par le côté de ce nombre quarré, puis multiplier le produit par le même côté. Comme pour multiplier 128 par 25, dont la racine quarrée, ou le côté, est 5, on multipliera 128 par 5, & le produit 640 encore par 5, & l'on aura 3200 pour le produit de la multiplication. Ainsi

pour sçavoir combien il y a de pieds quarrés en 32 toises quarrées, on multipliera 32 par 6, & le produit 192 encore par 6, & l'on aura 1152 pour le nombre des pieds quarrés qu'on cherche.

Pour multiplier un nombre quelconque, par exemple, 128 par un nombre qui soit produit par la multiplication de trois autres, comme par 108, qui est produit par la multiplication de ces trois 2, 6, 9, ou de ces trois 3, 6, 6; on multipliera le nombre proposé 128 par 2, le produit 256 par 6, & le second produit 1536 par 9. Ou bien l'on multipliera le nombre proposé 128 par 3, le produit 384 par 6, & le second produit 2304 encore par 6, & l'on aura 13824 pour le produit qu'il falloit trouver.

D'où il suit que, pour multiplier le nombre proposé par un nombre cubique, il faut multiplier le nombre proposé par le côté de ce nombre cubique, le produit par le même côté, & le second produit encore par le même côté. Comme pour multiplier 128 par 125, dont la racine cubique ou le côté est 5, on multipliera d'abord 128 par 5, puis le produit 640 encore par 5, enfin le second produit 3200 par 5, & l'on aura 16000 pour le produit de 128 par 125. Ainsi pour sçavoir combien il y a de pieds cubes en 32 toises cubes, on multipliera 32 par 6, ensuite le produit 192 aussi par 6, enfin le second produit 1152 encore par 6, & l'on aura 6912 pour le nombre des pieds cubes qu'on cherche.

Pour multiplier un nombre quelconque par telle puissance qu'on voudra de 5, on ajoutera au nombre proposé vers la droite autant de zero que l'exposant de la puissance comprendra d'unités, comme un zero pour 5, deux zero pour son quarré 25,

trois zero pour ſon cube 125, & ainſi de ſuite. On diviſera ce nombre ainſi augmenté par une ſemblable puiſſance de 2, ſçavoir par 2 pour 5, par 4 pour ſon quarré 25, par 8 pour ſon cube 125, & ainſi de ſuite.

Comme pour multiplier 128 par 5, on diviſera 1280 par 2, & le quotient 640 ſera le produit qu'on cherche. Mais pour multiplier 128 par 25, quarré de 5, on diviſera 12800 par 4, quarré de 2, & le quotient donnera 3200 pour le produit. Si on veut multiplier le même nombre 128 par 125, cube de 5, on diviſera 128000 par 8, cube de 2, & le quotient 16000 ſera le produit cherché. On fera les mêmes opérations pour les autres puiſſances, comme on le voit dans la table ſuivante, qui n'a été continuée que juſqu'à la 7e puiſſance.

1280	12800	128000	1280000
5	25	125	625
2	4	8	16
640	3200	16000	80000

12800000	128000000	1280000000
3125	15625	78125
32	64	128
400000	2000000	10000000

Pour ſçavoir combien valent 53 louis d'or à 11 livres le louis d'or, on écrira 53 ſous 53, en l'avançant d'une colonne vers la gauche, en ſorte que

le 3 réponde ſous le 5, & la ſomme de ces deux nombres ainſi diſpoſés, donnera 583 livres pour la valeur de 53 louis d'or, à 11 livres le louis d'or.

53
53
583

Pour ſçavoir combien valent 53 louis d'or à 12 liv. 10 ſ. le louis d'or, on prendra la huitieme partie du nombre donné 53, augmenté de deux zero vers la droite, ſçavoir la huitieme partie de 5300 conſidéré comme 5300 livres, & l'on aura 662 liv. 10 ſ. pour la valeur de 53 louis d'or à 12 liv. 10 ſ. le louis d'or.

Pour ſçavoir combien valent 53 louis d'or à 12 liv. 5 ſ. le louis d'or, on multipliera 53, que l'on conſidérera comme 53 livres, par 7, & le produit 371 liv. encore par 7. Le quart du ſecond produit 2597 liv. donnera 649 liv. 5 ſ. pour la valeur de 53 louis d'or à 12 liv. 5 ſ. le louis d'or.

Pour ſçavoir combien il y a de pouces en 53 pieds, il faut multiplier 53 par 12. Ce qui ſe peut faire en multipliant 53 par 2, & le produit 106 par 6; ou bien en multipliant 53 par 3, & le produit 159 par 4. Mais cela ſe peut faire ſans multiplication, en écrivant 53 ſous 53, & encore une fois 53, en l'avançant d'une colonne, en ſorte que le 3 réponde ſous le 5; car la ſomme de ces trois nombres ainſi diſpoſés, donnera 636 pour le nombre des pouces qui ſont compris en 53 pieds. C'eſt auſſi le nombre des deniers qui ſont compris en 53 ſols.

53
53
53
636

Pour multiplier enſemble deux nombres compoſés de pluſieurs figures, par exemple 12 & 18, on réduira le premier nombre 12 en ces trois parties compoſées chacune d'une ſeule figure, 2, 4, 6,

2	4	8
	6	12
	8	16
4	4	16
	6	24
	8	32
6	4	24
	6	36
	8	48
somme		216

& pareillement le ſecond nombre 18 en ces trois parties composées auſſi chacune d'une ſeule figure 4, 6, 8, dont chacune ſera multipliée par la premiere partie 2 du premier nombre ; enſuite par la ſeconde figure 4 du même premier nombre ; enfin par la troiſieme figure 6 du même premier nombre : la ſomme de tous les produits ſera celui qui doit provenir de la multiplication de 12 par 18, ou de 18 par 12.

Multiplication par les doigts.

SI vous voulez multiplier 7 par 8, premierement prenez la différence de 7 à 10 qui eſt 3, & ayant levé les dix doigts des deux mains, abaiſſez trois doigts d'une main qui ſera, par exemple, la gauche. Secondement, prenez la différence de 8 à 10, qui eſt deux, & abaiſſez deux doigts de l'autre main qui ſera la droite. Troiſiemement, multipliez le nombre des doigts levés d'une main par le nombre des doigts levés de l'autre, le produit, qui eſt 6, ſera retenu pour être mis au rang des unités. Quatriemement, ajoutez le nombre des doigts abaiſſés des deux mains, & la ſomme qui eſt ici 5, doit être placée au rang des dixaines. Ainſi on trouvera que 7 multiplié par 8 produit 56.

On voit, par cet exemple, qu'il faut prendre la différence de 10 à chacun des deux nombres donnés, que le produit de ces deux différences, déſi-

gnées par les doigts levés de chaque main, donnera le nombre des unités du produit total, & que la somme des doigts abaissés donnera les dixaines de ce produit total.

Autre multiplication abrégée.

SI l'on avoit un grand nombre à multiplier par un autre grand nombre, comme 453216 par 3289, il seroit bon de se servir de cette méthode que nous avons tirée de Langius. Je choisis le plus petit de ces nombres 3289 pour le multiplicateur, & je fais une table à deux colonnes.

453216	1	453216
906432	2	3289
1359648	3	———
1812864	4	4078944
2266080	5	3625728
2719296	6	906432
3172512	7	1359648
3625728	8	———
4078944	9	1490627424

L'une de ces colonnes, qui est à droite, contient les premiers chiffres de la numération 1, 2, 3, &c. jusqu'au plus grand chiffre 9, qui se trouve dans le multiplicateur 3289 : ces chiffres sont disposés les uns sous les autres, comme on le voit dans la table. L'autre colonne contient le nombre à multiplier 453216, qui est placé vis-à-vis de l'unité. On a mis le double de ce nombre vis-à-vis de 2, le triple vis-à-vis de 3, & ainsi de suite jusqu'au plus haut chiffre 9, qui est dans la seconde colonne.

Cette table étant ainſi faite, on diſpoſera le nombre à multiplier & le multiplicateur l'un ſous l'autre à l'ordinaire : comme le premier chiffre du multiplicateur eſt 9, on prendra le nombre qui lui répond dans la table, & on l'écrira au-deſſous des nombres donnés : le ſecond chiffre étant 8, on prendra le nombre qui lui correſpond dans la table, & on l'écrira au-deſſous du premier écrit, en obſervant de le reculer d'une place, parce que le 8 exprime des dixaines. On fera la même choſe à l'égard des autres chiffres qui ſe trouvent dans le multiplicateur. Enfin on fera l'addition de ces nombres ; la ſomme donnera le produit des deux nombres propoſés.

PROBLEME VII.

Diviſion abrégée.

POur diviſer un grand nombre par un plus petit, comme 1492862 par 432, il faudroit mettre, ſelon la méthode commune, le diviſeur 432 vers la gauche ſous 1492, pour ſçavoir combien de fois il y eſt contenu. Mais pour n'employer que l'addition & la ſouſtraction, faites un tarif du diviſeur 432 en le mettant vers la droite vis-à-vis de 1, & l'ajoutez à lui-même, pour avoir ſon double 864, que vous écrirez ſous 432 vis-à-vis de 2. Puis ajoutez le même nombre 432 à ſon double 864, pour avoir ſon triple 1296, que vous écrirez en bas vis-à-vis de 3. Ajoutez pareillement le même diviſeur 432 à ſon triple 1296, pour avoir ſon quadruple 1728, que vous écrirez deſſous vis-à-vis de 4, & ainſi des autres, en écrivant toujours les multiples du diviſeur 432, vis-à-vis des autres nombres 5, 6, 7, 8, 9, 10. Le der-

1	432	1492992 } 3456
2	864	1296...
3	1296	——
4	1728	1969
5	2160	1728
6	2592	——
7	3024	2419
8	3456	2160
9	3888	——
10	4320	2592
		2592
		——
		000

nier 10 doit avoir vis-à-vis de lui le même diviſeur 432 augmenté d'un zero vers la droite, ſi le tarif eſt bien fait.

Cette préparation étant faite, pour ſçavoir tout d'un coup combien de fois le diviſeur 432 eſt contenu dans 1492, cherchez ce nombre dans le tarif, ou celui qui étant moindre, en approche le plus. C'eſt ici 1296, qui ſe trouvant à côté de 3, fait voir que 3 doit être la premiere figure du quotient. Si vous ôtez ce nombre 1296 de 1492, il reſtera 196. A ce reſte joignez vers la droite la figure 9 qui ſuit 1492 dans le dividende pour avoir 1969 que vous chercherez dans le tarif, ou celui qui étant moindre en approche le plus, & qui eſt ici 1728. Comme ce nombre ſe trouve à côté de 4, vous poſerez 4 pour la ſeconde figure du quotient. Enſuite vous ôterez ce nombre 1728 de 1969, & il reſtera 241. A ce reſte vous joindrez vers la droite la figure 9 qui ſuit 14929 dans le dividende, pour avoir 2419 que vous chercherez

dans le tarif, ou celui qui étant moindre, en approche le plus, & qui est ici 2160. Le nombre 5 qui est à côté du nombre 2160, sera la troisieme figure du quotient. On continuera à faire les mêmes opérations qu'on vient de faire, jusqu'à ce que la division soit achevée.

Cette maniere est très-commode, quand on a plusieurs grands nombres à diviser par un même nombre, parce qu'ayant fait un tarif du diviseur, il sert pour faire toutes les divisions dont on a besoin. C'est ce qui arrive aux arpenteurs qui ont souvent de grands nombres à diviser par 144, lorsqu'ils veulent réduire des pouces quarrés en pieds quarrés, ou par 1728, quand ils veulent réduire des pouces cubes en pieds cubes.

Pour diviser un nombre quelconque par telle puissance qu'on voudra de 5, on le multipliera par une semblable puissance de 2. On retranchera du produit vers la droite autant de figures que le degré de la puissance contiendra d'unités. Les figures qui resteront vers la gauche, seront le quotient, & celles qui auront été retranchées seront le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur sera une semblable puissance de 10.

Comme pour diviser 128 par 5, on retranchera le 6 qui est à la droite de 256, double de 128, & l'on aura $25 \frac{6}{10}$ pour le quotient. Pour diviser le meme nombre 128 par 25, quarré de 5, on retranchera les deux dernieres figures 12 qui sont à la droite de 512, quadruple de 128, & l'on aura $5 \frac{12}{100}$ pour le quotient. Ainsi des autres.

Pour diviser un nombre quelconque par un plus petit, qui soit produit par la multiplication de deux autres plus petits, on divisera le nombre pro-

posé par l'un de ces deux plus petits nombres, & le quotient sera divisé par l'autre nombre. Le second quotient sera celui qu'on cherche.

Comme pour diviser 20736 par 24, qui est produit par la multiplication de ces deux nombres 3, 8, aussi-bien que de ces deux, 4, 6, on prendra la huitieme partie de son tiers, ou la sixieme partie de son quart : ou bien, ce qui est la même chose, on prendra le tiers de sa huitieme partie, ou le quart de sa sixieme partie, & l'on aura 864 pour le quotient cherché.

D'où il suit que pour réduire en toises quarrées des pieds quarrés, on doit prendre la sixieme partie de la sixieme partie du nombre proposé des pieds quarrés, parce qu'une toise quarrée contient 36 pieds quarrés, & que 6 fois 6 font 36. Ainsi pour réduire en toises quarrées 20736 pieds quarrés, on prendra la sixieme partie de la sixieme partie 3456 de 20736, & l'on aura 576 pour le nombre des toises quarrées qui sont contenues en 20736 pieds quarrés. Pareillement, pour réduire en toises quarrées 542 pieds quarrés, on prendra la sixieme partie de la sixieme partie $90 \frac{1}{6}$ de 542, & l'on aura 15 toises quarrées & 2 pieds quarrés pour la valeur de 542 pieds quarrés.

PROBLEME VIII.

De quelques propriétés des nombres.

I.

Le nombre 9 est tel que, s'il multiplie un nombre entier quelconque, la somme des figures du produit est divisible par le même nombre 9 sans reste. Si on multiplie, par exemple, 53 par 9, & qu'on

qu'on ajoute ensemble les figures du produit 477, la somme 18 est exactement divisible par 9.

II.

Si l'on prend deux nombres quelconques, l'un des deux, ou leur somme, ou leur différence est divisible par 3. Soient pris les deux nombres 6, 5, le premier 6 est divisible par 3. Si on choisit les deux nombres 11, 5, leur différence 6 est divisible par 3. Enfin si on prend les deux nombres 7, 5, leur somme est divisible par 3.

III.

On peut diviser par 6 le produit de deux nombres dont les quarrés ajoutés ensemble font un nombre quarré; ainsi 12, produit de ces deux nombres 3, 4, dont les quarrés 9, 16, ajoutés ensemble, font le nombre quarré 25, dont le côté est 5, est divisible par 6.

Pour trouver deux nombres dont les quarrés fassent ensemble un nombre quarré, multipliez deux nombres quelconques. Le double de leur produit sera l'un des deux nombres qu'on cherche, & la différence de leurs quarrés sera l'autre nombre.

Comme si l'on multiplie ces deux nombres 2, 3, dont les quarrés sont 4, 9, le produit sera 6, dont le double 12, & la différence 5 des quarrés 4, 9, sont deux nombres tels que leurs quarrés 144, 25, font ensemble ce nombre quarré 169, dont le côté est 13. *Voyez les problêmes 9 & 10.*

IV.

La somme & la différence de deux nombres quelconques, dont les quarrés different d'un nom-

bre quarré, ſont chacune ou un nombre quarré, ou la moitié d'un nombre quarré.

Ainſi 16, ſomme des deux nombres 6, 10, dont les quarrés 36, 100, different du nombre quarré 64, qui a 8 pour racine quarrée, & leur différence 4, ſont chacune un nombre quarré. De même 18, ſomme des deux nombres 8, 10, dont les quarrés 64, 100, different du nombre quarré 36, qui a 6 pour racine, & leur différence 2, ſont les moitiés de ces deux nombres quarrés 36, 4.

Pour trouver deux nombres dont la ſomme & la différence ſoient chacune un nombre quarré, auquel cas les quarrés de ces deux nombres différeront auſſi d'un nombre quarré; choiſiſſez deux nombres à volonté, comme 2, 3, dont le produit eſt 6, & dont les quarrés ſont 4, 9. La ſomme 13 de ces deux quarrés, & le double 12 du produit 6, ſont les deux nombres qu'on cherche. Car leur ſomme 25, & leur différence 1, ſont chacun un nombre quarré : de plus leurs quarrés 169, 144, different enſemble du nombre quarré 25, qui a 5 pour racine quarrée.

Pour trouver deux nombres dont la ſomme & la différence ſoient chacune la moitié ou le double d'un nombre quarré, auquel cas leurs quarrés différeront auſſi d'un nombre quarré; choiſiſſez à volonté deux nombres, comme 2, 3, dont les quarrés ſont 4, 9. La ſomme 13 de ces deux quarrés, & leur différence 5 ſont les deux nombres qu'on cherche. Car leur ſomme 18, & leur différence 8 ſont les moitiés de ces deux nombres quarrés 36, 16, ou les doubles de ces deux autres nombres quarrés 9, 4 : de plus leurs quarrés 169, 25, different de ce nombre quarré 144, qui a 12 pour racine quarrée.

V.

Tout nombre quarré finit par deux zeros, ou par l'une de ces cinq figures, 1, 4, 5, 6, 9. Cette proposition sert *à faire connoître quand un nombre proposé n'est point quarré* : c'est lorsqu'il ne finit ni par deux zeros, ni par quelqu'une des cinq figures précédentes. Quand même il finiroit par deux zeros, on peut assurer qu'il n'est point quarré, lorsque ces deux zeros ne sont pas précédés de quelqu'une des cinq figures précédentes.

VI.

Toute fraction quarrée, c'est-à-dire, qui a sa racine quarrée, est telle que le produit du numérateur par le dénominateur a sa racine quarrée. Cette proposition sert *à faire connoître quand une fraction proposée est quarrée* : c'est lorsqu'en multipliant le numérateur par le dénominateur, le produit est un nombre quarré.

Ainsi l'on connoît que cette fraction $\frac{28}{63}$ est quarrée, parce qu'en multipliant le numérateur 28 par le denominateur 63, le produit 1764 est un nombre quarré, dont le côté est 42; alors la racine quarrée de la fraction proposée $\frac{28}{63}$ sera $\frac{42}{63}$, en retenant le même dénominateur 63, ou bien $\frac{28}{42}$, en retenant le même numérateur 28. Car l'une & l'autre de ces deux fractions $\frac{28}{42}$, $\frac{42}{63}$, est égale à $\frac{2}{3}$, qui est la racine quarrée de la fraction proposée $\frac{28}{63}$ ou $\frac{5}{9}$.

VII.

Toute fraction cubique, c'est-à dire, qui a sa racine cubique, est telle qu'en multipliant le numérateur par le quarré du dénominateur, ou le dénominateur par le quarré du numérateur, le

produit a ſa racine cubique. Cette propoſition ſert à *faire connoître quand une fraction propoſée eſt cubique :* c'eſt lorſqu'en multipliant le numérateur par le dénominateur, ou le dénominateur par le numérateur, le produit eſt un nombre cubique.

Ainſi l'on connoît que cette fraction $\frac{24}{375}$ eſt cubique, parce qu'en multipliant le numérateur 24 par le quarré 140625 du dénominateur 375, le produit 3375000 a ſa racine cubique 150; ou bien parce qu'en multipliant le dénominateur 375 par le quarré 576 du numérateur 24, le produit 216000 a 60 pour racine cubique : alors la racine cubique de la fraction propoſée $\frac{24}{375}$ ſera $\frac{150}{375}$ en retenant le même dénominateur 375; ou bien $\frac{24}{60}$ en retenant le même numérateur 24. Car l'une & l'autre de ces deux fractions $\frac{150}{375}$, $\frac{24}{60}$, eſt égale à $\frac{2}{5}$ qui eſt la racine cubique de la fraction propoſée $\frac{24}{375}$, ou $\frac{8}{125}$.

VIII.

Quoiqu'il ne ſoit pas poſſible de trouver deux puiſſances homogenes, dont la ſomme & la différence ſoient chacune une ſemblable puiſſance, comme deux quarrés dont la ſomme & la différence ſoient chacune un nombre quarré, ou deux cubes dont la ſomme & la différence ſoient chacune un nombre cubique; néanmoins il eſt poſſible & même très-facile de *trouver deux nombres triangulaires, dont la ſomme & la différence ſoient chacune un nombre triangulaire.*

Voici deux nombres triangulaires 15, 21, dont les côtés ſont 5 & 6 : leur ſomme 36, & leur différence 6, ſont auſſi des nombres triangulaires, dont les côtés ſont 8 & 3. Voici encore deux autres

nombres triangulaires 780, 990, dont les côtés sont 39 & 44 : leur somme 1770, & leur différence 210, sont aussi des nombres triangulaires, dont les côtés sont 59, 20. Si vous voulez encore deux autres nombres triangulaires, les voici; 1747515, 2185095, dont les côtés sont 1869, 2090 : leur somme 3932610, & leur différence 437580, sont aussi des nombres triangulaires, dont les côtés sont 2804, 935.

On appelle *nombre triangulaire* celui qui provient de la somme de quelques-uns des nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. pris de suite en commençant par l'unité. On peut en prendre autant qu'on voudra, & le dernier de ceux qui seront pris, & qui sera le plus grand, est appellé le *côté* du nombre triangulaire. Ainsi l'on connoît que ce nombre 10 est triangulaire, & que son côté est 4, parce qu'il est égal à la somme des quatre premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, dont le dernier & plus grand est 4. Il a été appellé *triangulaire*, parce que l'on peut disposer 10 points en forme de triangle équilatéral, dont chaque côté en comprend 4; ce qui a fait dire que 4 étoit le côté du nombre triangulaire 10.

De même 21 est un nombre triangulaire, & son côté est 6, parce qu'il est égal à la somme des 6 premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, dont le dernier & le plus grand est 6. Ces nombres 55, 78 sont des nombres triangulaires. Consultez le traité du triangle arithmétique par M. Pascal.

Pour connoître si un nombre proposé est triangulaire, il faut le multiplier par 8, & ajouter 1 au produit; si cette somme a une racine quarrée, le nombre proposé sera triangulaire. Ainsi l'on con-

noît que ce nombre 10 eſt triangulaire, parce qu'étant multiplié par 8, & le produit 80 étant augmenté de 1, la ſomme 81 a pour racine quarrée 9. On connoît auſſi que ce nombre 3932610 eſt triangulaire, parce qu'étant multiplié par 8, & le produit 31460880 étant augmenté de 1, la ſomme 31460881 eſt un nombre quarré, dont la racine eſt 5609.

Pour avoir le côté d'un nombre triangulaire, il faut prendre la plus petite moitié de la racine trouvée. Ainſi pour avoir le côté du nombre triangulaire 10, prenez 4, la plus petite moitié de 9, racine trouvée, & 4 ſera le côté de 10. De même pour avoir le côté du nombre triangulaire 3932610, prenez la plus petite moitié de 5609, racine trouvée, & 2804 ſera le côté du nombre triangulaire propoſé.

IX.

La difference de deux puiſſances homogenes, comme de deux nombres quarrés, de deux nombres cubiques &c. eſt diviſible par la difference de leur côtés. La difference 21 de ces deux quarrés 25, 4, dont les côtés ſont 5, 2, eſt diviſible par 3, difference de ces côtés; & le quotient 7 eſt égal à la ſomme des mêmes côtés. La difference 117 des deux cubes 125, 8, dont les côtés ſont 5, 2, eſt diviſible par 3, difference de ces côtés, & le quotient 39 eſt égal à la ſomme de 10, produit des côtés 5, 2, & de 29, ſomme de leurs quarrés 25, 4.

X.

La difference de deux puiſſances homogenes,

dont l'exposant commun est un nombre pair, est divisible par la somme de leurs côtés. La différence 21 de ces deux quarrés 25, 4, dont les côtés sont 5, 2, est divisible par 7, somme de ces côtés, & le quotient 3 est égal à la différence des mêmes côtés. La différence 609 des deux quarrés-quarrés 625, 16, dont les côtés sont 5, 2, est divisible par 7, somme de ces côtés, & le quotient 87 est égal au produit sous la différence 3 des mêmes côtés 5, 2, & la somme 29 de leurs quarrés 15, 4.

XI.

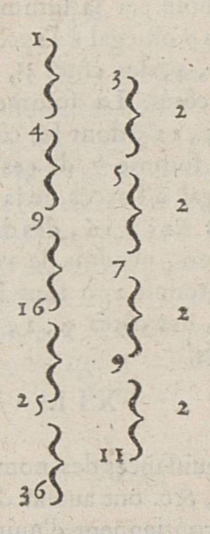
La somme de deux puissances homogenes, dont l'exposant commun est un nombre impair, est divisible par la somme de leurs côtés. La somme 133 des deux cubes 125, 8, dont les côtés sont 5, 2, est divisible par la somme 7 de ces côtés; & le quotient 19 est égal à l'excès de 29, somme des quarrés 25, 4, des côtés 5, 2, sur le produit 10 des même côtés. La somme 3157 des deux sursolides 3125, 32, dont les côtés sont 5, 2, est divisible par la somme 7 de ces côtés; & le quotient 451 est égal à l'excès de la somme 741 des quarrés-quarrés 625, 16, des deux côtés, 5, 2, & du quarré 100, produit de 10 sous les mêmes côtés, sur le produit 290 sous la somme 29 des quarrés 25, 4, des côtés 5, 2, & le produit 10 des mêmes côtés.

XII.

Toutes les puissances des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ont autant de différences que leurs exposans contiennent d'unités, les dernieres

différences étant toujours égales entre elles dans chaque puiſſance; ſçavoir, les ſecondes différences, c'eſt-à-dire, les différences des différences dans les quarrés, 1, 4, 9, 16, 25, 36, &c. car ces ſecondes différences ſont 2, les premieres étant les nombres impairs 3, 5, 7, 9, 11, &c. Les troiſiemes différences, c'eſt-à-dire, les différences des différences des premieres différences dans les cubes 1, 8, 27, 64, 125, 216, &c. car ces troiſiemes différences ſont 6, les premieres étant 7, 19, 37, 61, 91, &c, & les ſecondes, ou les différences de ces différences étant 12, 18, 24, 30, &c. qui ſe ſurpaſſent de 6, qui eſt leur troiſieme différence. Ainſi des autres.

Quarrés. 1res Diff. 2es Diff.



Cubes.	1res Diff.	2es Diff.	3es Diff.
1			
	7		
8		12	
	19		6
27		18	
	37		6
64		24	
	61		6
125		30	
	91		
216			

Il arrive la même chose aux nombres *polygones*, qui se forment par une continuelle addition des nombres en progression arithmétique qu'on appelle *gnomons*, dont le premier est l'unité, qui est virtuellement nombre polygone de toute espece; aux nombres *piramidaux*, qui sont formés par l'addition continuelle des nombres polygones considérés comme des gnomons, dont le premier est toujours l'unité; & aux nombres *piramido-piramidaux*, qui sont formés par l'addition continuelle des nombres pyramidaux considerés comme des gnomons, dont le premier est toujours l'unité.

Lorsque les gnomons se surpassent de l'unité, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. les nombres

polygones, 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c. qui s'en forment ſont appellés *triangulaires*, dont la propriété eſt telle que chacun étant multiplié par 8, & le produit étant augmenté de l'unité, la ſomme eſt un nombre quarré. Ce qui peut ſervir *à faire connoître quand un nombre propoſé eſt triangulaire*, comme nous avons déja dit ailleurs. De plus la ſomme 9 du ſecond & du troiſieme, en omettant le premier, eſt un nombre quarré. De même, en omettant les quatre premiers, la ſomme 36 du cinquieme & du ſixieme eſt un nombre quarré, & ainſi de ſuite : en ſorte qu'en omettant à volonté les premiers nombres triangulaires, les deux qui ſe ſuivent étant ajoutés, forment un quarré.

Article 8, p. 12.

Lorſque les gnomons ſe ſurpaſſent de deux unités, comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. les nombres polygones 1, 4, 9, 16, 25, 36, &c., qui en ſont formés, ſont des nombres quarrés.

Lorſque les gnomons ſe ſurpaſſent de trois unités, comme 1, 4, 7, 10, 13, 16, &c, les nombres 1, 5, 12, 22, 35, 51, &c. qui en ſont formés, ſont appellés *pentagones*, dont la propriété eſt telle que chacun étant multiplié par 24, & le produit étant augmenté de l'unité, la ſomme eſt un nombre quarré. Ce qui ſert à *faire connoître quand un nombre propoſé eſt pentagone*. Ainſi des autres. Voyez Schooten dans ſes *ſectiones miſcellaneæ*.

Pour trouver la ſomme de tant de nombres triangulaires qu'on voudra, en commençant depuis l'unité, par exemple, de ces huit, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, on multipliera le nombre déterminé 8 par le ſuivant 9, & le produit 72 encore par le ſuivant 10, puis l'on diviſera le ſecond

produit 720 par 6, & le quotient 120 sera la ſomme qu'on cherche.

La ſomme de toutes ces fractions infinies $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{21}$, &c. dont le numérateur commun eſt 1, & les dénominateurs 3, 6, 10, 15, 21, &c, ſont des nombres triangulaires, vaut préciſément 1.

Pour trouver la ſomme de tant de nombres quarrés que l'on voudra depuis l'unité, par exemple, de ces huit, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, on ôtera de 240, double de la ſomme 120 d'autant de nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, le dernier nombre triangulaire 36, & le reſte 204 ſera la ſomme qu'on cherche.

XIII.

Les cubes 1, 8, 27, 64, 125, 216, &c. des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ſont tels, que le premier 1, eſt un nombre quarré, dont le côté 1 eſt le premier nombre triangulaire: la ſomme 9 des deux premiers 1, 8, eſt un nombre quarré, dont le côté 3 eſt le ſecond nombre triangulaire: la ſomme 36 des trois premiers 1, 8, 27, eſt un nombre quarré, dont le côté 6 eſt le troiſieme nombre triangulaire, & ainſi de ſuite. C'eſt pourquoi *pour trouver la ſomme de tant de nombres cubiques qu'on voudra depuis l'unité*, par exemple, de ces ſix 1, 8, 27, 64, 125, 216, on prendra le quarré 441 du ſixieme nombre triangulaire 21, qui ſera la ſomme qu'on cherche.

XIV.

Entre les nombres entiers, il n'y a que 2, qui,

ajouté à lui-même, faſſe le même nombre qu'étant multiplié par lui-même, ſçavoir 4. Car tout autre nombre, comme 5, étant ajouté à lui-même, fait 10, & étant multiplié par lui-même fait 25.

Quoiqu'on ne puiſſe pas trouver deux nombres entiers dont la ſomme ſoit égale à leur produit, on peut néanmoins en *trouver aiſément deux en fractions, & même en raiſon donnée, dont la ſomme ſoit égale à leur produit.* C'eſt en diviſant la ſomme des deux termes de la raiſon donnée, par chacun de ces deux termes. Si l'on veut, par exemple, leur donner la raiſon de 2 à 3, on diviſera ſéparément leur ſomme 5 par 2 & par 3, & l'on aura ces deux nombres $2\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, qui ajoutés font autant que multipliés enſemble, ſçavoir, $4\frac{1}{6}$.

XV.

Un nombre quelconque eſt la moitié de la ſomme de deux autres également éloignés de lui, l'un par défaut, & l'autre par excès : par exemple, 6 eſt la moitié de la ſomme 12 des deux nombres 5 & 7, qui en ſont egalement éloignés, ou des deux nombres 4 & 8, qui en ſont auſſi également éloignés, &c.

XVI.

Le nombre 37 eſt tel, qu'étant multiplié par chacun de ces nombres 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, qui ſont en progreſſion arithmétique, tous les produits ſont compoſés de trois figures ſemblables.

37	37	37	37	37	37	37	37	37
3	6	9	12	15	18	21	24	27
111	222	333	444	555	666	777	888	999

XVII.

Les deux nombres 5 & 6 ſont appellés *ſphériques*, parce que leurs puiſſances finiſſent par les mêmes nombres. Par exemple, les puiſſances de 5, ſçavoir 25, 125, 625, &c. finiſſent par le même nombre 5. De même, les puiſſances de 6; ſçavoir 36, 216, 1296, &c. finiſſent par le même nombre 6.

Le nombre 5 a cela de particulier, qu'étant multiplié par un nombre pair, comme par 8, le produit 40 ſe termine par un zero.

L'autre nombre 6 a cela auſſi de particulier, qu'il eſt le premier des nombres qu'on appelle *parfaits*, parce qu'ils ſont égaux à la ſomme de leurs parties aliquotes; car ce nombre 6 eſt égal à la ſomme de ſes parties aliquotes, 1, 2, 3. Le nombre 28 eſt auſſi un nombre parfait, parce qu'il eſt égal à la ſomme de ſes parties aliquotes 1, 2, 4, 7, 14.

Pour trouver autant de nombres parfaits qu'on voudra, il faut ſe ſervir de la progreſſion double, dont le premier terme ſoit 2, & non pas l'unité, en écrire les termes de ſuite, & les ſéparer de deux en deux, avec cette précaution, que le ſecond terme 4 ſera répété dans la ſeconde ſéparation, & y tiendra la premiere place, après avoir tenu la ſeconde place dans la premiere ſéparation, comme vous le voyez ici. Ces termes étant ainſi ſéparés,

2, 4	4, 8	16, 32	64, 128
6	28	496	8128
3 par 2	7 par 4	31 par 16	127 par 64

256, 512	1024, 2048	&c.
130816	209628	&c.

on les prendra deux à deux dans leurs ſéparations, & après avoir diminué de l'unité celui qui tient la ſeconde place dans chaque ſéparation, on les multipliera par celui qui tient la premier place dans la même ſéparation ; le produit ſera un nombre parfait. Ainſi pour avoir le premier nombre parfait, on conſidérera que la premiere ſéparation contient ces deux termes 2, 4 ; on ôtera 1 de 4, & l'on multipliera le reſte 3 par 2, le produit 6 eſt le premier nombre parfait. De même pour avoir le ſecond nombre parfait, on conſidérera que la ſeconde ſéparation contient ces deux termes 4, 8, on ôtera 1 de 8, & l'on multipliera le reſte 7 par 4 ; le produit 28 ſera le ſecond nombre parfait ; on multipliera enſuite 31 par 16 pour avoir le troiſieme nombre parfait ; & ainſi des autres.

REMARQUE.

Les nombres parfaits ſont ſi rares, qu'il ne s'en trouve qu'un depuis un juſqu'à dix, un depuis dix juſqu'à cent, un depuis cent juſqu'à mille ; un depuis mille juſqu'à dix mille, un depuis dix mille juſqu'à cent mille, &c. De plus il eſt à remarquer que tous les nombres parfaits ont alternativement pour leur derniere figure 6 & 8.

Pour trouver toutes les parties aliquotes, ou tous les diviſeurs d'un nombre, il faut diviſer ce nombre & ſes quotiens par les nombres premiers, juſqu'à ce que le dernier quotient ſoit l'unité. Enſuite on multipliera ces diviſeurs premierement trouvés, de

la maniere qu'on l'enſeignera, pour avoir tous les autres.

Soit propoſé le nombre 210, dont on veut avoir tous les diviſeurs, ou toutes les parties aliquotes. Diviſez 210 par 2, il viendra au quotient

210	105	35	7	1
2	3	5	7	

105, que vous diviſerez par 3; puis vous diviſerez le ſecond quotient 35 par 5, qui donnera 7 pour troiſieme quotient, lequel n'a point d'autre diviſeur que lui-même, & le quotient eſt l'unité.

Diſpoſez tous ces diviſeurs de la maniere que vous le voyez dans la table ſuivante, en commençant par le nombre 2; mettez enſuite le nombre 3 au-deſſous, mais rangé un peu à côté. Vous

2

3. 6.

5. 10. 15. 30.

7, 14. 21. 42. 35. 70. 105. 210.

multiplierez ces deux nombres 2, 3, & vous écrirez le produit 6 à coté de 3, & dans le même rang, comme vous le voyez. Ces nombres 2, 3, 6, ſeront des diviſeurs de 210. Puis mettez le nombre 5, troiſieme diviſeur, au-deſſous & un peu à côté, multipliez le par tous les diviſeurs déja trouvés, & vous aurez pour diviſeurs nouveaux 10, 15, 30. Enfin poſez le nombre 7 au deſſous & un peu à côté; multipliez-le par tous les diviſeurs déja trouvés, & vous aurez encore pour diviſeurs

14, 21, 42, 35, 70, 105, 210. Tous ces nombres pris pour diviſeurs, ou trouvés dans les deux tables précédentes, joints à l'unité, feront les diviſeurs cherchés, & les parties aliquotes cherchées, ſi on en retranche le nombre propoſé 210.

On a diſpoſé les deux tables précédentes & les ſuivantes, comme on le voit, pour donner plus de lumiere dans une opération qui eſt aſſez abſtraite d'elle-même.

Si vous voulez trouver tous les diviſeurs, ou les parties aliquotes de 2032, diviſez d'abord ce nombre par 2, premier nombre premier, & tous les quotients qui peuvent l'être, comme vous le voyez dans la table ſuivante. Le dernier quotient

2032	1016	508	254	127	1
2	2	2	2	127	

127 étant nombre premier ne peut être diviſé que par lui-même, & il a pour quotient l'unité.

Diſpoſez tous ces diviſeurs de la maniere que vous le voyez dans la table ſuivante, pour trouver les autres. Après avoir mis le premier diviſeur 2, mettez le même 2, qui eſt ſecond diviſeur, au-deſſous, & à côté multipliez ces deux diviſeurs 2, 2, & vous aurez 4, que vous rangerez à côté comme dans cette table. Poſez encore 2 au-deſ-

2.

2. 4.

2. 8.

2. 16.

127. 254. 508. 1016. 2032.

ſous

ſous : ſuivant la regle précédente il faudroit multiplier tous les diviſeurs trouvés par ce troiſieme diviſeur 2 ; mais il eſt inutile de multiplier 2 par 2, qui donneroit encore 4 déja trouvé ; ainſi on néglige cette multiplication , & on multiplie ſeulement 4 par 2 , pour avoir 8 , qui eſt un nouveau diviſeur.

Enſuite vous écrirez au deſſous pour la quatrieme fois le diviſeur 2 , & vous vous contenterez de multiplier 8 par ce nombre 2 : ce qui donne 16 ; car il eſt inutile de multiplier tous les 2 précédens, puiſqu'ils donneroient pour produits 4 , qui a déja été trouvé. (On obſervera la même choſe à l'égard des autres nombres, dont la multiplication ne donneroit point de nouveau diviſeur).

Enfin vous poſerez 127 au deſſous des diviſeurs, & à côté, vous multiplierez ce nombre une fois ſeulement par 2 , & par tous les autres diviſeurs trouvés, & vous aurez 254, 508, 1016, 2032. Tous ces nombres pris pour diviſeurs, ou trouvés dans la table précédente , ſeront les diviſeurs cherchés, & les parties aliquotes cherchées, ſi on en retranche le nombre propoſé 2032.

On peut s'exercer ſur les nombres 8128 & 2096128 , qui ſont des nombres parfaits. On remarquera que toutes les puiſſances de 2 priſes autant de fois que 2 eſt diviſeur , ſont des diviſeurs & parties aliquotes de ces deux nombres , & que la ſomme de ces puiſſances & de l'unité eſt égale au dernier nombre premier, qui ſe trouve être 127 dans 8128 , & 2047 dans 2096128.

Autre maniere de trouver les parties aliquotes , ou tous les diviſeurs d'un nombre propoſé.

Soit propoſé le nombre 8128 , l'unité eſt tou-

jours un diviſeur de quelque nombre que ce ſoit : ainſi vous la mettrez à la tête d'une premiere colonne, qui contiendra une partie des parties aliquotes ou diviſeurs. Diviſez enſuite ce même nombre 8128, par le plus petit nombre qui ſe préſentera, ſçavoir par 2, que l'on peut connoître aiſément, parce que le nombre propoſé 8128 eſt pair, & le quotient ſera 4064, que vous écrirez à la droite, vis-à-vis le 2 dans une ſeconde colonne, pour ſecond diviſeur, qui ſe peut encore diviſer par le premier diviſeur 2 ; ce qui fait que ſon quarré 4 ſera auſſi un diviſeur, que vous écrirez au-deſſous de ſon côté 2, & vis-à-vis le ſecond quotient 2032 pour un autre diviſeur, qui ſe peut encore diviſer par le premier diviſeur 2, ce qui fait ſon cube 8 qui ſera auſſi un diviſeur, que vous écrirez au-deſſous du quarré 4, & vis à vis le troiſieme quotient 1016 pour un autre diviſeur, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à un dernier diviſeur, qui ne ſe puiſſe plus diviſer par le premier 2, comme il arrive au ſixieme quotient 127, qui étant un nombre premier, fait connoître que tous les diviſeurs du nombre propoſé 8128 ſont trouvés, où vous voyez que leur ſomme eſt égale à ce nombre, & que par conſéquent il eſt parfait.

1	
2	4064
4	2032
8	1016
16	508
32	254
64	127
——	——
127	8001
	127
	——
	8128

C'eſt de la même façon que nous avons trouvé tous les diviſeurs de cet autre nombre 2096128, qui eſt auſſi parfait, parce qu'il eſt égal à la ſomme de ſes parties aliquotes : où l'on voit que le dernier

quotient 2047, qui répond à la dixieme puissance 1024 du premier diviseur 2, est aussi un nombre

1	
2	1048064
4	524032
8	262016
16	131008
32	65504
64	32752
128	16376
256	8188
512	4094
1024	2047
2047	2094081
	2047
	2096128

premier : car s'il avoit pu être divisé par quelque autre nombre que par 2, comme par 3, il auroit fallu multiplier par ce nouveau diviseur 3, toutes les puissances du premier diviseur 2, & diviser le nombre proposé & tous les quotiens par ce même nouveau diviseur 3, pour avoir d'autres diviseurs, &c., comme vous allez voir dans l'exemple suivant.

XVIII.

Le nombre 120 est égal à la moitié de la somme 240 de ses parties aliquotes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60. Le nombre 672 est aussi égal à la moitié de la somme 1344 de ses parties aliquotes, que nous avons

trouvées par une méthode semblable à la précédente, sans qu'il soit besoin de la répéter davantage. On peut trouver une infinité d'autres nombres qui auront la même propriété : on peut même en trouver d'autres qui seront la troisieme partie, ou telle autre partie qu'on voudra de la somme de leurs parties aliquotes ; mais ce n'est pas ici le lieu d'en dire davantage.

1	
2	336
4	168
8	84
16	42
32	21
3	224
6	112
12	56
24	28
48	14
96	7
252	1092
	252
	1344

XIX.

Ces deux nombres 220, 284, sont appellés *amiables*, parce que le premier 220 est égal à la somme des parties aliquotes 1, 2, 4, 71, 142, du second 284 ; & réciproquement le second 284, est égal à la somme des parties aliquotes, 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 du premier 220. Ces parties aliquotes sont faciles à trouver par ce qui a été enseigné auparavant.

Pour trouver tous les nombres amiables par ordre, servez-vous du nombre 2, qui est tel que si de son triple 6, de son sextuple 12, & de l'octodecuple 72 de son quarré 4, on ôte l'unité, il reste ces trois nombres premiers 5, 11, 71, dont les deux premiers 5, 11, étant multipliés ensemble, & leur produit 55 étant multiplié par le double 4 du nombre 2, ce second produit 220 sera le premier des deux nombres qu'on cherche. Et pour

avoir l'autre qui est 284, on multipliera le troisieme nombre premier 71 par le même double 4 du nombre 2 pris au commencement.

2	2	4
3	6	18
6	12	72
1	1	1
5	11	71
	5	4
	55	284
	4	
	220	

Pour trouver deux autres nombres amiables, au lieu de 2, servez-vous d'une de ses puissances qui

8	8	64
3	6	18
24	48	1152
1	1	1
23	47	1151
	23	16
	1081	18416
	16	
	17296	

ait la même propriété, tel qu'est son cube 8. Car

si de son triple 24, de son sextuple 48, & de l'octodécuple 1152 de son quarré 64, on ôte l'unité, il reste ces trois nombres premiers 23, 47, 1151, dont les deux premiers 23, 47, doivent être multipliés ensemble, & leur produit 1081 doit être encore multiplié par le double 16 du cube 8, afin d'avoir 17296 pour le premier des deux nombres qu'on cherche. Et pour avoir l'autre, qui est 18416, on multipliera le troisieme nombre premier 1151 par le même double 16 du cube 8.

Si vous voulez deux autres nombres, au lieu de deux, ou de son cube 8, servez-vous de son quarré-cube 64, qui a la même propriété. Car si de son triple 192, de son sextuple 384, & de l'octodécuple 73728 de son quarré 4096, on ôte l'unité, il reste ces trois nombres premiers 191, 383, 73727, par le moyen desquels, & par ce qui a été dit auparavant, on trouvera ces deux autres nom-

64	64	4096
3	6	18
192	384	73728
1	1	1
191	383	73727
	191	128
	73153	9437056
	128	
	9363584	

bres 9363584, 9437056, qui sont amiables, ainsi des autres. Consultez ce qui a été dit sur les

parties aliquotes au livre troisieme des nouveaux élémens d'algebre, tant dans les problêmes, que dans les questions. Consultez aussi Schooten dans ses *sectiones miscellaneæ*.

Regle générale pour trouver tant de nombres amiables qu'on voudra.

FAites une table qui contiendra plusieurs rangs de nombres. Commencez par le second de ces rangs, qui doit contenir la progression double *, dont le premier terme sera 2. Triplez les termes de cette progression ; ces nombres triples 6, 12 24, &c, placés chacun sous celui dont il est formé, composeront le troisieme rang. Ces nombres diminués de l'unité 5, 11, 23, &c, & placés chacun au-dessus du terme qui lui répond, composeront le premier rang. Enfin l'on aura les termes du quatrieme rang 71, 287, &c, en multipliant 12, second terme du troisieme rang, par 6, premier terme de ce même rang ; le produit 72 diminué de l'unité, qui est 71, sera le premier terme du quatrieme rang, & on le placera sous 12. On multipliera ensuite 24, troisieme terme, par le précédent 12 ; & le produit 288 diminué de l'unité qui est 287, sera le second terme du quatrieme rang. On trouvera les autres termes par la même mé-

*Voyez le prob. II.

5	11	23	47	95	191
2	4	8	16	32	64
6	12	24	48	96	192
	71	287	1151	4607	18431

thode, c'est-à-dire, en multipliant un terme du troisieme rang par celui qui le précede immédiate-

ment dans ce même rang, & en plaçant le produit diminué de l'unité au dessous du terme qu'on a choisi dans le troisieme rang, pour le multiplier avec le précédent.

Cette table étant ainsi construite, on choisira trois nombres premiers, dont l'un sera pris dans le quatrieme rang; les autres seront pris dans le premier rang : l'un de ceux-ci doit répondre au nombre premier choisi du quatrieme rang, c'est-à-dire, celui qui est placé dans le premier rang au dessus du nombre premier choisi dans le quatrieme rang : l'autre sera celui qui précede immédiatement dans le premier rang le second dont on vient de parler. Par exemple, si l'on choisit dans le quatrieme rang le nombre 71, celui qui lui répond dans le premier rang est 11, & 5 est celui qui précede immédiatement 11; ces nombres 5 & 11 étant nombres premiers, seront les termes avec lesquels on trouvera deux nombres *amiables*, en suivant ce qu'on va dire. Multipliez 71 par 4, terme qui lui répond dans le second rang; le produit 284, est l'un de ces nombres amiables. Multipliez aussi 11 par le même terme 4, qui lui répond dans le second rang, & le produit 44 par 5, terme qui précede immédiatement 11 dans le premier rang; ce second produit 220 sera l'autre des nombres amiables que l'on cherche. On trouvera d'autres nombres amiables, en suivant la même méthode.

REMARQUE.

Si on choisissoit 4607 dans la quatrieme rang pour un des nombres premiers, on trouveroit que 95, qui lui répond dans le premier rang, n'est point un nombre premier : ainsi on ne pourroit

point se servir de ce terme pour choisir des nombres amiables.

Comme il est difficile de connoître si un nombre est premier, quand il est un peu grand, nous ajouterons à la fin de ce problême une table de tous les nombres premiers, qui sont compris entre 1 & 10000.

X X.

Les quarrés 961, 1156, des deux nombres 31, 34, sont tels que le premier 961 avec ses parties aliquotes 1, 31, fait une somme 993 égale à la somme des parties aliquotes, 1, 2, 4, 17, 34, 68, 289, 578, du second 1156 dont le côté est 34.

XXI.

Les deux nombres suivans 26, 20, sont tels que chacun avec ses parties aliquotes fait une même somme. Car le premier 26 avec ses parties aliquotes 1, 2, 13, fait 42, & le second 20 avec ses parties aliquotes 1, 2, 4, 5, 10, fait aussi 42.

Il arrive la même chose aux deux nombres 488, 464, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 930 : aux deux nombres 11, 6, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 12 : & aux deux nombres 17, 10, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 18.

On peut même avoir trois nombres, dont chacun avec ses parties aliquotes fera une même somme, comme 20, 26, 41, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 42 ; 23, 14, 15, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 24 ; & 46, 55, 71, dont chacun avec ses parties aliquotes fait 72.

Ces deux quarrés 106276, 165649 ont pour racine 326, 407. La somme des diviseurs de cha-

cun eſt 187131. Les diviſeurs de 106276 ſont, 1, 2, 4, 163, 326, 652, 26569, 53138, 106276. Ceux de 165649 ſont 1, 11, 37, 121, 407, 1369, 4477, 15059, 165649.

Ces deux quarrés 16, 25, ſont auſſi tels que la ſomme des diviſeurs de chacun eſt 31. Les diviſeurs de 16 ſont 1, 2, 4, 8, 16. Ceux de 25 ſont 1, 5, 25 : ainſi chacun avec leurs parties aliquotes fait 21.

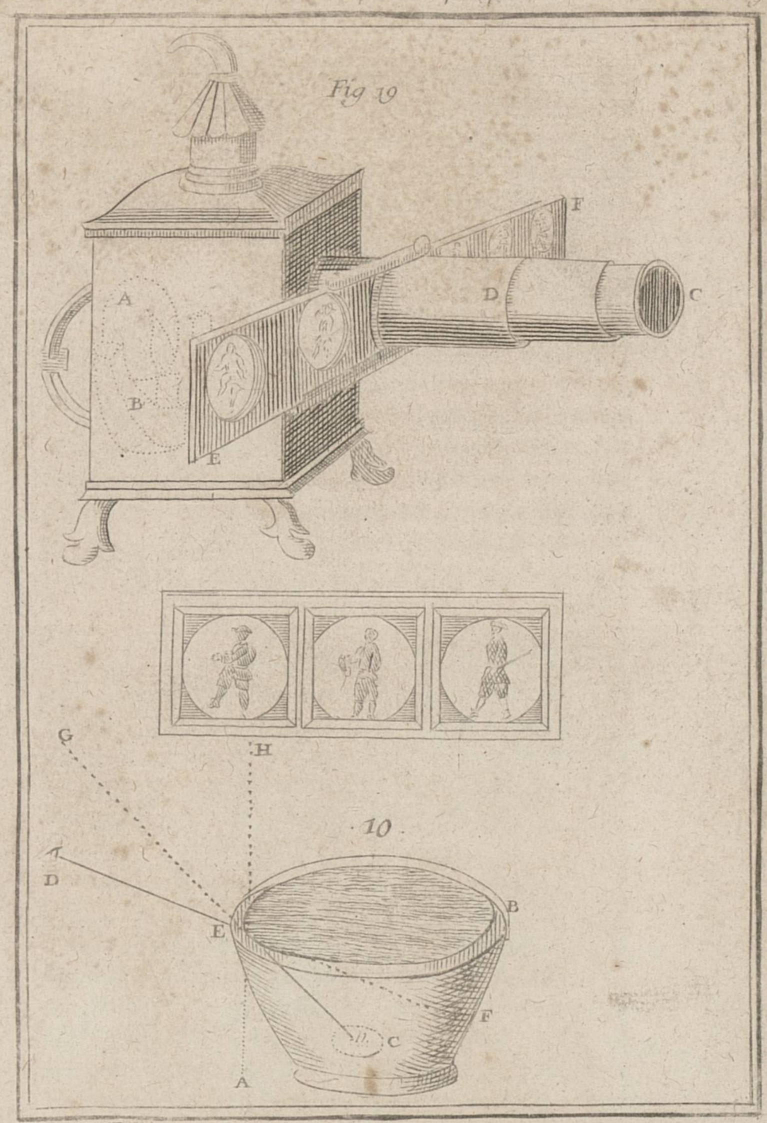
Par le moyen de ces deux derniers quarrés 16, 25, on en peut avoir autant d'autres qu'on voudra qui ayent la même propriété. Il ne faut que les multiplier par quelqu'autre nombre quarré impair qui ne ſoit pas diviſible par 5. Comme ſi on les multiplie chacun par 9, on aura ces deux autres nombres quarrés 144, 225, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 403 ; ou, ce qui eſt la même choſe, la ſomme des diviſeurs eſt 403.

XXII.

Le nombre quarré 81, dont la racine eſt 9, eſt tel qu'avec ſes parties aliquotes 1, 3, 9, 27, il fait ce nombre quarré 121, dont la racine eſt 11. Le nombre quarré 400, dont la racine eſt 20, eſt auſſi tel, qu'avec ſes parties aliquotes 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 200, il fait ce nombre quarré 961, dont la racine eſt 31.

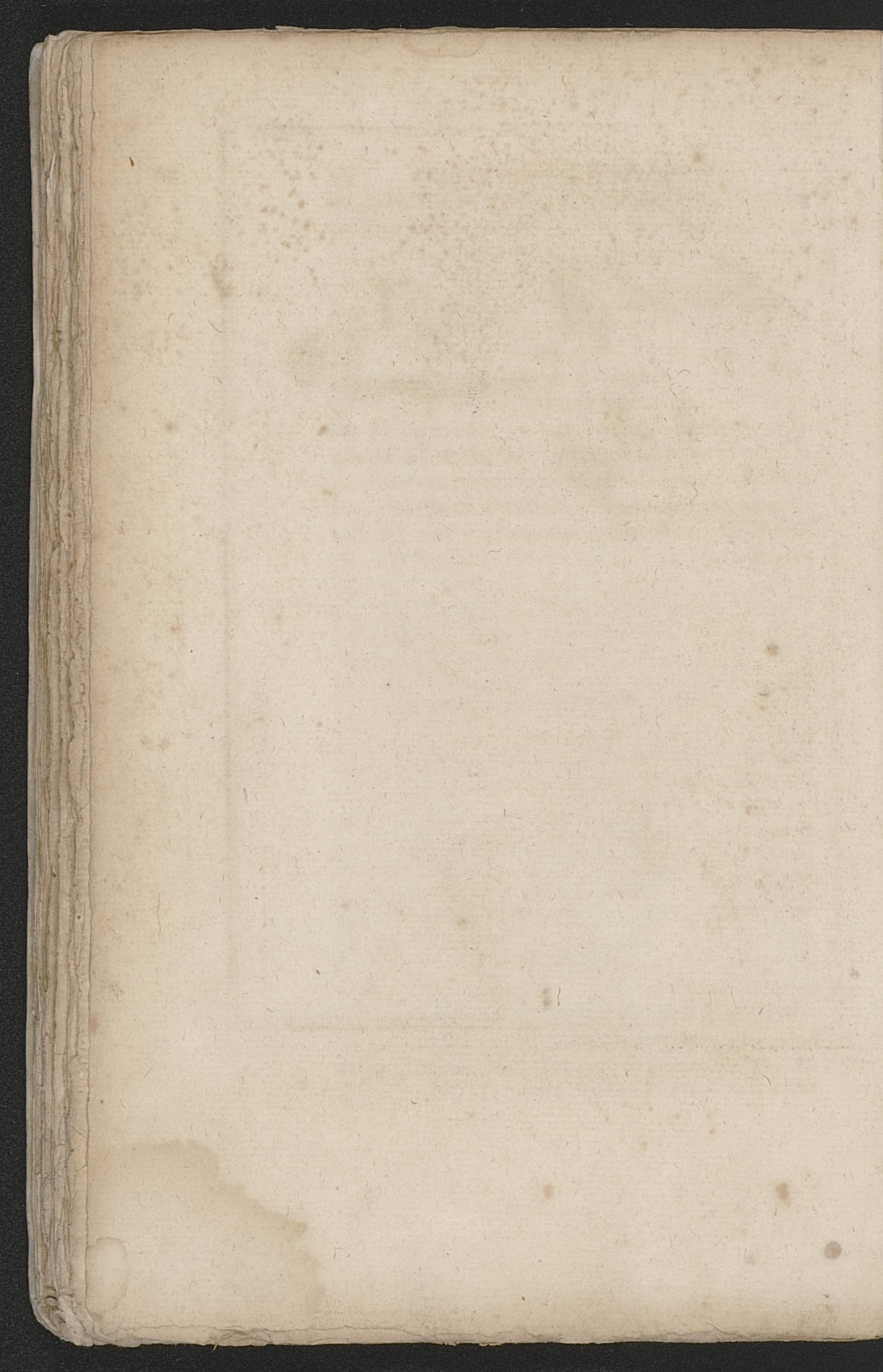
XXIII.

La ſomme 666 de ces trois nombres triangulaires 15, 21, 630, dont les côtés ſont 5, 6, 35, eſt auſſi un nombre triangulaire dont le côté eſt 36. Il arrive la même choſe à ces trois autres



8

To. I. Pl. 27



nombres triangulaires 210, 780, 1711, dont les côtés sont 20, 39 58. Car leur somme 2701 est un nombre triangulaire, dont le côté est 73. La somme 9180 de ces trois autres nombres triangulaires 666, 2628, 5886, dont les côtés sont 36, 72, 108, est aussi un nombre triangulaire, dont le côté est 135, &c.

XXIV.

Le quarré 49 du nombre 7, est tel que la somme 8 de ses parties aliquotes 1, 7, a pour racine cubique 2. Et le cube 343 du même nombre 7, est tel qu'avec ses parties aliquotes 1, 7, 49, il fait ce nombre quarré 400, dont le côtés est 20.

XXV.

Le quarré 9 du nombre 3, est tel que la somme 4 de ses parties aliquotes 1, 3, est un nombre quarré, dont le côté est 2. Le quarré 2401 du nombre 49, a la même propriété. Car la somme 400 de ses parties aliquotes 1, 7, 49, 343, est un nombre quarré dont la racine est 20.

XXVI.

Les deux nombres 99, 63, sont tels que la somme 57 des parties aliquotes 1, 3, 9, 11, 33, du premier 99, surpasse la somme 41 des parties aliquotes 1, 3, 7, 9, 21, du second 63 de ce nombre quarré 16, dont la racine est 4. Il arrive la même chose à ces deux autres nombres 325, 175. Car la somme 109 des parties aliquotes 1, 5, 13, 25, 65, du premier 325, surpasse la somme 73 des

parties aliquotes 1, 5, 7, 25, 35, du second 175, de ce nombre quarré 36, dont la racine est 6.

XXVII.

La somme de deux nombres qui different de l'unité est égale à la différence de leurs quarrés : & la somme des quarrés de leurs nombres triangulaires est aussi un nombre triangulaire. La somme 11 de ces deux nombres 5, 6, qui different de l'unité, est égale à la différence de leurs quarrés 25, 36; & leurs nombres triangulaires 15, 21, sont tels que la somme 666 de leurs quarrés 225, 441, est aussi un nombre triangulaire, dont le côté est 36.

XXVIII.

Les deux nombres triangulaires 6, 10, des deux nombres 3, 4, qui different aussi de l'unité, sont tels que leur somme 16, & leur différence 4, sont des nombres quarrés, dont les racines sont 4, 2, & que la somme 136 de leurs quarrés 36, 100, est un nombre triangulaire, dont le côté 16, est aussi un nombre quarré, dont la racine 4 est encore un nombre quarré dont la racine est 2.

Il arrive la même chose à ces deux autres nombres triangulaires 36, 45, dont les côtés 8, 9, différent aussi de l'unité. Car leur somme 81, & leur difference 9, sont des nombres quarrés dont les racines sont 9, 3. Et la somme 3321 de leurs quarrés 1296, 2025, est un nombre triangulaire dont le côté est 81, qui a pour racine quarrée 9, laquelle a aussi sa racine quarrée 3.

Il y a une infinité de couples d'autres nombres triangulaires, qui ont la même propriété. On les

trouvera en ôtant & en ajoutant un nombre quarré quelconque à son quarré, & les moitiés du reste & de la somme seront les deux nombres triangulaires qu'on cherche. Les côtés de ces nombres triangulaires ainsi trouvés, différeront entre eux de l'unité.

Comme si l'on ôte & qu'on ajoute ce nombre quarré 16 à son quarré 256, les moitiés du reste 240 & de la somme 272, donneront 120, 136, pour les deux nombres triangulaires qu'on cherche, dont les côtés 15, 16, different de l'unité. Voyez l'article VIII.

Ces deux nombres triangulaires ainsi trouvés, sont encore tels que le plus grand de leurs côtés est toujours un nombre quarré : que la différence de leurs quarrés est aussi un nombre quarré, que leur somme enfin est un quarré-quarré, qui est égal au quarré de leur différence, & au côté du nombre triangulaire que compose la somme de leurs quarrés.

Si vous voulez connoître les côtés de ce nombre triangulaire 120, multipliez-le par 8, & au produit ajoutez l'unité, la somme sera 961; tirez en la racine quarrée qui sera 31, prenez la plus petite moitié de cette racine 31 qui est 15; ce sera le côté du nombre triangulaire 120. Faites la même chose à l'égard de 136 & de tous les autres nombres triangulaires, dont vous voudrez trouver le côté. Voyez l'article VIII, p. 20.

XXIX.

La différence des quarrés de deux nombres en raison double est égale à la somme de leurs cubes, divisée par la somme des deux nombres, & la

même somme des cubes est le tiers d'un cube.

Si on prend les deux nombres 4, 8, qui sont en raison double, la différence 48 de leurs quarres 16, 64, est égale au quotient qui vient en divisant la somme 576 de leurs cubes 64, 512, par la somme 12 des deux nombres : & la même somme 576 des cubes est le tiers de ce cube 1728, dont le côté 12 est toujours égal à la somme des deux nombres.

Je n'aurois jamais fait, si je voulois mettre ici toutes les propriétés des nombres, qui sont infinies. C'est pourquoi je finirai ce problême par la table des nombres premiers, que j'ai promise.



Table des nombres premiers entre 1 & 10000.

2	167	383	617	881	1129	1429	1693	1993	2273	2557
3	173	389	619	883	1151	1433	1697	1997	2281	2579
5	179	397	631	887	1153	1439	1699	1999	2287	2591
7	181	401	641	907	1163	1447	1709	2003	2293	2593
11	191	409	643	911	1171	1451	1721	2011	2297	2609
13	193	419	647	919	1181	1453	1723	2017	2309	2617
17	197	421	653	929	1187	1459	1733	2027	2311	2621
19	199	431	659	937	1193	1471	1741	2029	2333	2633
23	211	433	661	941	1201	1481	1747	2039	2339	2647
29	223	439	673	947	1213	1483	1753	2053	2341	2657
31	227	443	677	953	1217	1487	1759	2063	2347	2659
37	229	449	683	967	1223	1489	1777	2069	2351	2663
41	233	457	691	971	1229	1483	1783	2081	2357	2671
43	239	461	701	977	1231	1499	1787	2083	2371	2677
47	241	463	709	983	1237	1511	1789	2087	2377	2683
53	251	467	719	991	1249	1523	1801	2089	2381	2687
59	257	479	727	997	1259	1531	1811	2099	2383	2689
61	263	487	733	1009	1277	1543	1823	2111	2389	269[illegible]
67	269	491	739	1013	1279	1549	1831	2113	2393	2699
71	271	499	743	1019	1283	1553	1847	2129	2399	2707
73	277	503	751	1021	1289	1559	1861	2131	2411	2711
79	281	509	757	1031	1291	1567	1867	2137	2417	2713
83	283	521	761	1033	1297	1571	1871	2141	2423	2719
89	293	533	769	1039	1301	1579	1873	2143	2437	2729
97	307	541	773	1049	1303	1583	1877	2153	2441	2731
101	311	547	787	1051	1307	1597	1879	2161	2447	2741
103	313	557	797	1061	1319	1601	1888	2179	2459	2749
107	317	563	811	1063	1321	1607	1901	2203	2467	2753
109	331	569	821	1069	1327	1609	1907	2207	2473	2767
113	337	571	823	1087	1361	1613	1913	2213	2477	2777
127	347	577	827	1091	1367	1619	1931	2221	2503	2789
131	349	587	829	1093	1373	1621	1933	2237	2521	2791
137	353	593	839	1097	1381	1627	1949	2239	2531	2797
139	359	599	853	1103	1399	1637	1951	2243	2539	2801
149	367	601	857	1109	1409	1657	1973	2251	2543	2803
151	373	607	859	1117	1423	1663	1979	2267	2549	2819
157	379	613	863	1123	1427	1667	1987	2269	2551	2833
163			877			1669				

Table des nombres premiers entre 1 & 10000.

2837	3187	3499	3797	4111	4451	4789	5101	5449	5791
2843	3191	3511	3803	4127	4457	4793	5107	5471	5801
2851	—	3517	3821	4129	4463	4799	5113	5477	5807
2857	3203	3527	3823	4133	4481	4801	5119	5479	5813
2861	3209	3529	3833	4139	4483	4813	5147	5483	5821
2879	3217	3533	3847	4153	4493	4817	5153	5501	5827
2887	3221	3539	3851	4157	4507	4831	5167	5503	5839
2897	3229	3541	3853	4159	4513	4861	5171	5507	5843
2903	3251	3547	3863	4177	4517	4871	5179	5519	5849
2909	3253	3557	3877	4201	4519	4877	5189	5521	5851
2917	3257	3559	3881	4211	4523	4889	5197	5527	5857
2927	3259	3571	3889	4217	4547	4903	5209	5531	5861
2939	3271	3581	3907	4219	4549	4909	5227	5557	5867
2953	3299	3583	3911	4229	4561	4919	5231	5563	5869
2957	—	3593	3917	4231	4567	4931	5233	5569	5879
2963	3301	3607	3919	4241	4583	4933	5237	5573	5881
2969	3307	3613	3923	4243	4591	4937	5261	5581	5897
2971	3313	3617	3929	4253	4597	4943	5273	5591	5903
2999	3319	3623	3931	4259	4603	4951	5279	5623	5923
3001	3323	3631	3943	4261	4621	4957	5281	5639	5927
3011	3329	3637	3947	4271	4637	4967	5297	5641	5939
3019	3331	3643	3967	4273	4639	4969	5303	5647	5953
3023	3343	3659	3989	4283	4643	4973	5309	5651	5981
3037	3347	3671	4001	4289	4649	4987	5323	5653	5987
3041	3359	3673	4003	4297	4651	4993	5333	5657	6007
3049	3361	3677	4007	4327	4657	4999	5347	5659	6011
3061	3371	3691	4013	4337	4663	—	5351	5669	6029
3067	3373	3697	4019	4339	4673	5003	5381	5683	6037
3079	3389	3701	4021	4349	4679	5009	5387	5689	6043
3083	3391	3709	4027	4357	4691	5011	5393	5693	6047
3089	3407	3719	4049	4363	4703	5021	5399	5701	6053
3109	3413	3727	4051	4373	4721	5023	5407	5711	6067
3119	3433	3733	4057	4391	4723	5039	5413	5717	6073
3121	3449	3739	4073	4397	4729	5051	5417	5737	6079
3137	3457	3761	4079	4409	4733	5059	5419	5741	6089
3163	3461	3767	4091	4421	4751	5077	5431	5743	6091
3167	3463	3769	4093	4423	4759	5081	5437	5749	—
3169	3467	3779	4099	4441	4773	5087	5441	5779	6101
3181	3469	3793	—	4447	4787	5099	5443	5783	6113
	3491					—			

Table des nombres premiers entre 1 & 10000.

6121	6449	6803	7151	7523	7853	8219	8581	8893	9241
6131	6451	6823	7159	7529	7867	8221	8597	8923	9257
6133	6469	6827	7177	7537	7873	8231	8599	8929	9277
6143	6473	6829	7187	7541	7877	8233	8609	8933	9281
6151	6481	6833	7193	7547	7879	8237	8623	8941	9283
6163	6491	6841	7207	7549	7883	8243	8627	8951	9293
6173	6521	6857	7211	7559	7901	8263	8629	8963	9311
6197	6529	6863	7213	7561	7907	8269	8641	8969	9319
6199	6547	6869	7219	7573	7917	8273	8647	8971	9323
6203	6551	6871	7229	7577	7927	8287	8663	8999	9337
6211	6553	6883	7237	7583	7933	8291	8669	9001	9341
6217	6563	6899	7243	7589	7937	8293	8677	9007	9343
6221	6569	6907	7247	7591	7949	8297	8681	9011	9349
6229	6571	6911	7253	7603	7951	8311	8689	9013	9371
6247	6577	6917	7283	7607	7963	8317	8693	9029	9377
6257	6581	6947	7297	7621	7993	8329	8699	9041	9391
6263	6599	6949	7307	7639	8009	8353	8707	9043	9397
6269	6607	6959	7309	7643	8011	8363	8713	9049	9403
6271	6619	6961	7321	7649	8017	8369	8719	9059	9413
6277	6637	6967	7331	7669	8039	8377	8731	9067	9419
6287	6653	6971	7333	7673	8053	8387	8737	9091	9421
6299	6659	6977	7349	7681	8059	8389	8741	9103	9431
6301	6661	6983	7351	7687	8069	8419	8747	9109	9433
6311	6673	6991	7369	7691	8081	8423	8753	9127	9437
6317	6679	6997	7393	7699	8087	8429	8761	9133	9439
6323	6689	7001	7411	7703	8089	8431	8779	9137	9461
6329	6691	7013	7417	7717	8093	8443	8783	9151	9463
6337	6701	7019	7433	7723	8101	8447	8803	9157	9467
6343	6703	7027	7451	7727	8111	8461	8807	9161	9473
6353	6709	7039	7457	7741	8117	8467	8819	9173	9479
6359	6719	7043	7459	7753	8123	8501	8821	9181	9491
6361	6733	7057	7477	7757	8147	8513	8831	9187	9497
6367	6737	7069	7481	7759	8161	8521	8837	9199	9511
6373	6761	7079	7487	7789	8167	8527	8839	9203	9521
6379	6763	7103	7489	7793	8171	8537	8849	9209	9533
6389	6779	7109	7499	7817	8179	8539	8861	9221	9539
6397	6781	7121	7507	7823	8191	8543	8863	9227	9547
6421	6791	7127	7517	7829	8209	8563	8867	9239	9551
6427	6793	7129		7841		8573	8887		

Table des nombres premiers entre 1 & 10000.

9587	9629	9679	9733	9781	9817	9859	9907	9967
—	9631	9689	9739	9787	9829	9871	9923	9973
9601	9643	9697	9743	9791	9833	9883	9929	—
9613	9649	—	9749	—	9839	9887	9931	
9619	9661	9719	9767	9803	9851	—	9941	
9623	9677	9721	9769	9811	9857	9901	9949	

PROBLEME IX.

Des triangles rectangles en nombres.

ON appelle *triangle rectangle en nombres*, trois nombres inégaux, dont le plus grand est tel, que son quarré est égal à la somme des qnarrés des deux autres, comme 3, 4, 5. Car le quarré 25 du plus grand 5, qu'on appelle *hypotenuse*, est égal à la somme des quarrés 9, 16, des deux autres 3, 4, qu'on appelle *côtés*, dont l'un étant pris pour la *base* du triangle rectangle, l'autre en sera la *hauteur*. La moitié 6 du produit 12 sous cette base & cette hauteur, se nomme *aire*, qui est toujours divisible par 3. Vous remarquerez que par le produit des deux nombres, nous entendons celui qui vient de leur multiplication.

Il y a une infinité de triangles rectangles de diverses especes, tant en nombres entiers qu'en nombres rompus : mais on les conçoit ordinairement en nombres entiers, entre lesquels le premier & le plus petit de tous est le précédent 3, 4, 5 : il a un infinité de belles propriétés, qu'il seroit trop long de rapporter ici. Je me contenterai de dire que la somme 216 des cubes 27, 64, 125, de ses deuxcôtés 3, 4, & de son hypoténuse 5, est un cube dont le côté 6 est égal à son aire.

Pour trouver en nombres autant de triangles rectangles qu'on voudra, prenez à volonté deux nombres, comme 2, 3, qu'on appelle *nombres générateurs*; & multipliez les ensemble, pour avoir leur produit 6; dont le double 12 sera le côté d'un triangle rectangle; l'autre côté sera égal à la différence 5 des quarrés 4, 9, des nombres générateurs 2, 3; & l'hypoténuse sera égale à la somme 13 des mêmes quarrés 4, 9. De sorte qu'on aura ce triangle rectangle 5, 12, 13 : car le quarré 169 de l'hypoténuse 13 est égal à la somme des quarrés 25, 144, dont les racines sont 5, 12.

Le premier triangle rectangle 3, 4, 5, dont les deux nombres générateurs sont 1, 2, est tel, que la différence des deux côtés 3, 4, est 1. Si vous voulez en *trouver un autre qui ait la même propriété*, prenez pour le plus petit nombre générateur de ce second triangle, le nombre 2, qui est le plus grand nombre générateur du premier. Doublez ce nombre 2; ajoutez à 4 double de 2, 1, le plus petit nombre générateur du premier, & vous aurez 5, qui sera le plus grand nombre générateur du second triangle cherché, que vous trouverez en suivant la regle qu'on vient de donner. Ces trois nombres seront 20, 21, 29, dont les deux côtés 20, 21, ne different que de l'unité.

Si vous voulez un troisieme triangle rectangle qui ait la même propriété, servez vous des deux nombres générateurs 2, 5, du triangle précédent, & prenez le plus grand 5 pour le plus petit du troisieme triangle rectangle. Doublez ce nombre 5, ajoutez à 10 double de 5, 2, le plus petit nombre générateur du triangle précédent, & vous aurez 12 pour le plus grand nombre générateur du troisieme triangle rectangle, qui sera 119, 120,

169, où la différence des deux côtés 119, 120, est aussi 1. Vous suivrez la même regle pour trouver les autres. La table que l'on a jointe ici servira à faire connoître les six premiers triangles, dont les côtés ne different que de l'unité : on peut la continuer aussi loin que l'on voudra, en suivant les exemples qu'on vient de donner.

Cotés.		*Hypotén.*	*Nombr.*	*génér.*
3.	4.	5.	1.	2.
20.	21.	29.	2.	5.
119.	120.	169.	5.	12.
696.	697.	985.	12.	29.
4059.	4060.	5741.	29.	70.
23660.	23661.	33461.	70.	169.

Le même premier triangle rectangle 3, 4, 5, est encore tel, que l'excès de l'hypoténuse 5 sur le côté 4 est aussi 1, parce que ses deux nombres générateurs 1, 2, different de l'unité.

Bases.	*Hauteurs.*	*Hypotén.*	*Nombr.*	*génér.*
3.	4.	5.	1.	2.
5.	12.	13.	2.	3.
7.	24.	25.	3.	4.
9.	40.	41.	4.	5.
11.	60.	61.	5.	6.
13.	84.	85.	6.	7.

C'est pourquoi on pourra *trouver une infinité d'autres triangles rectangles, qui auront la même propriété*, si pour leurs nombres générateurs on prend deux nombres qui different de l'unité, comme vous voyez dans la table précédente, où les premieres différentes des bases 3, 5, 7, 9, &c. sont égales, & où les secondes différences des hau-

teurs 4, 12, 24, 40, &c. ſont auſſi égales ; ce qui arrive auſſi aux hypoténuſes 5, 13, 25, 41, &c.

REMARQUES.

Les ſecondes différences des hauteurs ſont égales ; car la différence de 12 à 4 eſt 8, & la différence de 24 à 12 eſt 12 : mais la différence de 12 à 8 eſt 4. De même la différence de 40 à 24 eſt 16, & la différence de 16 à 12 eſt auſſi 4. Ainſi des autres.

Hauteurs.	1es *Diff.*	2es *Diff.*
12 4	8	4
24 12	12	
40 24	16	4

Les hypoténuſes ont auſſi les ſecondes différences égales, comme on le voit par cette table.

Hypotén.	1es *Diff.*	2es *Diff.*
13 5	8	4
25 13	12	
41 25	16	4

Les baſes ſont ici des nombres impairs ; & ſi l'on veut qu'elles ſoient les quarrés de ces mêmes nombres impairs, il ne faut que prendre les hauteurs & les hypoténuſes pour les nombres géné-

rateurs des triangles rectangles qu'on cherche; lesquels par conséquent seront tels.

Bases.	*Hauteurs.*	*Hypotén.*	*Nombr.*	*génér.*
9.	40.	41.	4.	5.
25.	312.	313.	12.	13.
49.	1200.	1201.	24.	25.
81.	3280.	3281.	40.	41.
121.	7320.	7321.	60.	61.
169.	14280.	14281.	84.	85.

Si au lieu d'un côté, vous voulez que l'*hypoténuse soit un nombre quarré*, il faut que les deux nombres générateurs soient les côtés d'un triangle rectangle, comme vous voyez ici, où l'hypoténuse est le quarré du plus grand nombre générateur augmenté de l'unité.

Côtés.		*Hypotén.*	*Nombr.*	*génér.*
7.	24.	25.	3.	4
119.	120.	169.	5.	12
336.	527.	625.	7.	24
720.	1519.	1681.	9.	40
1320.	3479.	3721.	11.	60.
2184.	6887.	7225.	13.	84.

Ce triangle rectangle 21, 28, 35, est tel que les deux côtés 21, 28, sont des nombres triangulaires, dont les côtés 6, 7, different de l'unité, & le quarré 1225 de l'hypoténuse 34 est aussi un nombre triangulaire, dont le côté est 49.

Il arrive la même chose à cet autre triangle rectangle 820, 861, 1189. Car les deux côtés 820,

861, sont des nombres triangulaires dont les côtés 40, 41 different aussi de l'unité, & le quarré 1413721 de l'hypoténuse 1189 est aussi un nombre triangulaire, dont le côté est 1681.

Il arrive encore la même chose à ce troisieme triangle rectangle 28441, 28680, 40391. Car les deux côtés 28441, 28680, sont des nombres triangulaires, dont les côtés 238, 239, different aussi de l'unité, & le quarré 1631432881 de l'hypoténuse 40391, est aussi un nombre triangulaire, dont le côté est 57121. Ainsi des autres.

Les triangles rectangles suivans ont pour bases & pour hypoténuses des nombres triangulaires, &

Bases.	*Hauteurs.*	*Hypotén.*	*Nombr. génér.*	
6.	8.	10.	1.	3.
36.	27.	45.	3.	6.
120.	64.	136.	6.	10.
300.	125.	325.	10.	15.
630.	216.	666.	15.	21.
1176.	343.	1225.	21.	28.

pour hauteur des nombres cubiques. On en *trouvera autant que l'on voudra*, en ajoutant & en ôtant un nombre quarré de son quarré; car la moitié de la somme sera l'hypoténuse, la moitié du reste sera la base, & la hauteur sera égale au cube du côté du premier nombre quarré : ou bien en prenant pour nombres générateurs les nombres triangulaires par ordre, comme vous voyez ici, où le plus petit nombre générateur d'un triangle rectangle est le même que le plus grand du triangle rectangle précédent, &c.

PROBLEME X.

De la progreſſion arithmétique.

ON appelle *progreſſion arithmétique*, une ſuite de grandeurs, dont la différence eſt la même à l'égard de celles qui ſe ſuivent immédiatement. Cette ſuite peut aller en augmentant ou en diminuant. Ces nombres 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. forment une progreſſion arithmétique, dont la différence ou l'excès eſt 2. Cette autre ſuite de nombres 2, 6, 10, 14, 18, 22, &c. eſt une autre progreſſion arithmétique, dont la différence eſt 4. Ces deux progreſſions vont en augmentant. Celle-ci 32, 27, 22, 17, 12, 7, &c. va en diminuant, & ſa différence eſt 5. Chaque grandeur de la progreſſion eſt appellée *terme*.

La principale propriété de la progreſſion arithmétique, eſt que ſi on prend trois termes de ſuite, 6, 10, 14, la ſomme 20, des deux extrêmes 6, 14 eſt double du moyen 10. De même ſi on prend quatre termes de ſuite 6, 10, 14, 18, la ſomme 24 des deux extrêmes 6, 18, eſt égale à celle des deux moyens 10, 14. Enfin ſi on prend un plus grand nombre de termes de ſuite, comme ces ſix, 2, 6, 10, 14, 18, 22, la ſomme 24 des deux extrêmes 2, 22, eſt encore égale à celle des deux autres 6, 18, qui en ſont également éloignés, & à celle des deux 10, 14, qui en ſont auſſi également éloignés. D'où il eſt aiſé de conclure que quand le nombre des termes eſt impair, la ſomme de deux termes également éloignés du moyen, eſt double de ce terme moyen, comme on le voit dans les cinq termes 2, 6, 10, 14, 18. Car la ſomme 20 des deux extrêmes 2, 18, ou de ces deux autres 6, 14, qui

ſont également éloignés du moyen 10, auſſi bien que des extrêmes, eſt double de ce moyen 10.

On peut aiſément trouver autant qu'on voudra de triangles rectangles en nombres, par le moyen de cette double progreſſion arithmétique $1\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{5}$, $3\frac{3}{7}$, $4\frac{4}{9}$, $5\frac{5}{11}$, $6\frac{6}{13}$, $7\frac{7}{15}$, $8\frac{8}{17}$, &c. où l'excès eſt 2 dans les fractions, & 1 dans les nombres entiers. Car ſi l'on réduit l'entier avec ſa fraction en une ſeule fraction, comme $1\frac{1}{3}$ en $\frac{4}{3}$, * le numérateur 4, & le dénominateur 3, ſeront les côtés de ce triangle rectangle 3, 4, 5, dont on connoîtra l'hypoténuſe 5, en prenant la racine quarrée de 25, ſomme des quarrés 9, 16 des côtés 3, 4. De même ſi l'on réduit $2\frac{2}{5}$ en $\frac{12}{5}$, * le dénominateur 5 & le numérateur 12, ſeront les côtés de ce triangle rectangle 5, 12, 13. Ainſi des autres, où vous voyez que tout nombre impair peut être l'un des deux côtés d'un triangle rectangle, en nombres entiers.

Au lieu de cette double progreſſion arithmétique, on peut ſe ſervir de celle-ci, $1\frac{7}{8}$, $2\frac{11}{12}$, $3\frac{15}{16}$, $4\frac{19}{20}$, $5\frac{23}{24}$, $6\frac{27}{28}$, $7\frac{31}{32}$, $8\frac{35}{36}$, &c. où l'excès eſt 4 dans les fractions, & 1 dans les nombres entiers. Car ſi l'on réduit $1\frac{7}{8}$ en $\frac{15}{8}$, * le dénominateur 8, & le numérateur 15, ſeront les deux côtés de ce triangle rectangle 8, 15, 17. De même ſi l'on réduit $2\frac{11}{12}$ en $\frac{35}{12}$, * le dénominateur 12, & le numérateur 35, ſeront les deux côtés de cet autre triangle rectangle 12, 35, 37. Ainſi des autres, où vous voyez qu'un nombre diviſible par 4 peut être l'un des deux côtés d'un triangle rectangle en nombres entiers.

* Ce qui ſe fait en multipliant le nombre entier par le dénominateur, & ajoutant au produit le numérateur.

Pour trouver une infinité de ſemblables progreſſions, on prendra à volonté deux nombres quelconques, comme 1, 2, ou 3, 5, qui ſont les termes générateurs des deux progreſſions précédentes, ou tels autres nombres qu'il plaira.

Premierement, on aura le numérateur de la premiere fraction en multipliant ces termes l'un par l'autre : ſi le produit eſt impair, il ſera le numérateur cherché; mais s'il eſt pair, il faudra prendre le double de ce produit.

Secondement, on aura le dénominateur de cette premiere fraction, en ajoutant les deux termes choiſis, & en multipliant cette ſomme par la différence de ces mêmes termes: ſi le produit eſt impair, il ſera le dénominateur cherché; mais s'il eſt pair, on en prendra la moitié.

Troiſiémement, on aura le numérateur de la fraction ſuivante: 1°. En multipliant la différence des termes par 2, ſi elle eſt paire, ou par 4, ſi elle eſt impaire. 2°. En multipliant ce produit par le plus grand terme choiſi. 3°. En ajoutant ce ſecond produit au numérateur de la premiere fraction; cette ſomme formera le numérateur de la ſeconde fraction.

Enfin on aura le dénominateur de cette ſeconde fraction, en ajoutant le quarré de la différence des termes choiſis, s'il eſt pair, ou le double de ce quarré, s'il eſt impair, au dénominateur de la premiere fraction. Cette ſomme donnera le dénominateur de la ſeconde fraction.

Les deux premiers termes de cette progreſſion étant réduits en entiers & en fractions, il ſera aiſé de trouver la ſuite d'autant de termes qu'on voudra; puiſqu'on connoît la différence des entiers, celle des numérateurs & celle des dénominateurs.

I.

Dans une progreſſion arithmétique, la ſomme des termes eſt égale à la ſomme des deux extrêmes, multipliée par la moitié du nombre de tous ces termes. C'eſt pourquoi *pour trouver la ſomme d'autant de termes qu'on voudra d'une progreſſion arithmétique*, par exemple, de ces huit, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, on multipliera par leur nombre 8, la ſomme 20 des deux extrêmes 3, 17, & 80, moitié du produit 160, ſera la ſomme qu'on cherche.

II.

Si au contraire on connoît la ſomme des termes, leur nombre & le premier terme, on trouvera chacun de ces termes, en cherchant leur excès en cette ſorte. Si la ſomme donnée des termes eſt par exemple 80, que leur nombre ſoit 8, & que le premier terme ſoit 3, diviſez par le nombre donné des termes 8 le double 160 de la ſomme donnée 80; ôtez du quotient 20 le double 6 du premier terme donné 3; enfin diviſez le reſte 14 par le nombre donné des termes diminués de l'unité; c'eſt à dire, dans cet exemple, par 7; le quotient 2 ſera l'excès qu'on cherche, lequel étant ajouté au premier terme donné 3, donnera 5 pour le ſecond terme, auquel ſi l'on ajoute le même excès 2, on aura 7 pour le troiſieme terme, & ainſi de ſuite.

III.

Mais ſi l'on donne la ſomme des termes, leur nombre & l'excès, on trouvera le premier terme,

& par conséquent tous les autres en cette sorte. Que la somme donnée des termes soit 80, que leur nombre soit 8, & que l'excès soit 2; divisez le double 160 de la somme donnée 80 par le nombre donné des termes 8; ôtez du quotient 20, autant de fois l'excès 2, que le nombre donné des termes 8 comprend d'unités moins une; sçavoir, 7 fois, c'est-à-dire, qu'il faut ici ôter 14; la moitié 3 du reste 6, sera le premier terme, auquel ajoutant l'excès donné 2, on aura 5 pour le second terme: si l'on ajoute à ce second terme le même excès 2, on aura 7 pour le troisieme terme, & ainsi de suite.

IV.

Si on connoît le premier terme, le nombre & la différence des termes, on connoîtra le dernier terme en cette sorte. Multipliez le nombre des termes diminué de l'unité par la différence, ajoutez à ce produit le premier terme, la somme donnera le dernier terme. Soit le premier terme 3, le nombre des termes 8, & leur différence 2, multipliez 7, nombre des termes diminué de l'unité, par 2, différence des termes, ajoutez au produit 14 le premier terme 3, & vous aurez 17 pour le dernier terme. Nous ferons l'application de ces articles dans les questions suivantes.

QUESTION I.

Un propriétaire fait faire un puits à un maçon avec cette condition, qu'il lui donnera 3 livres pour la premiere toise de profondeur, 5 pour la seconde, 7 pour la troisieme, & ainsi de suite en augmentant de 2 livres à chaque toise, jusqu'à 20 toises

de profondeur. On demande combien il sera dû au maçon, quand les 20 toises de profondeur seront achevées.

POur résoudre cette question, multipliez les deux livres d'augmentation pour chaque toise de profondeur par le nombre des toises moins une de toute la profondeur, c'est-à-dire, par 19, & ayant ajouté au produit 28 le premier terme 3, vous aurez 41 pour le dernier terme. Ajoutez à ce dernier terme 41 le premier terme 3, qui est le nombre des livres promises pour la premiere toise, multipliez la somme 44 par la moitié 10 du nombre 20 des toises de toute la profondeur, & vous aurez 440 livres pour l'argent dû au maçon sur 20 toises de profondeur.

REMARQUE.

Cette question se résout par le quatrieme & le premier article; par le quatrieme article on trouve le dernier terme 41, & par le premier on trouve 440 livres, somme des 20 termes.

QUESTION II.

Un voyageur a fait 100 *lieues en huit jours; chaque jour il a fait également plus de chemin que le jour précédent, & le premier jour il a fait deux lieues; on demande combien de lieues il a fait chaque jour.*

POur résoudre cette question, divisez le double 200 des lieues données 100, par le nombre donné 8 des jours, & ôtez du quotient 25 le

double 4 du nombre donné 2 des lieues du premier jour : divisez le reste 21 par 7, qui est le nombre donné des jours diminué de l'unité ; le quotient 3 fera connoître que le voyageur a fait chaque jour 3 lieues plus que le précédent. D'où il est aisé de conclure, que comme le premier jour il a fait 2 lieues, le second il en aura fait 5, le troisieme 8, le quatrieme 11, le cinquieme 14, le sixieme 17, le septieme 20, & le huitieme 23, ce qui fait en tout 100 lieues, comme porte la question, & comme on le peut connoître par le premier article.

REMARQUE.

Cette seconde question se résout par le second article.

QUESTION III.

Un voyageur a fait 100 lieues en huit jours, & il a fait chaque jour trois lieues plus que le précédent ; on demande combien de lieues il a fait chaque jour.

POur résoudre cette question, divisez le double 200 des lieues données 100, par le nombre donné 8 des jours, & ôtez du quotient 25 le nombre 21, qui est le nombre donné 3 des lieues de surplus en chaque jour, multiplié par le nombre donné des jours moins un, c'est-à-dire par 7 : la moitié 2 du reste fera connoître que le premier jour le voyageur a fait 2 lieues, & par conséquent qu'il en a fait 5 le second jour, 8 le troisieme, 11 le quatrieme, 14 le cinquieme, 17 le sixieme, 20 le septieme, & 23 le huitieme, ce qui fait en tout 100 lieues, comme porte la question, & comme on le peut connoître par le premier article.

REMARQUE.

Cette troisieme question se résout par le troisieme article.

QUESTION IV.

Un voleur en s'enfuyant fait 8 lieues par jour, il est poursuivi par un archer, qui n'a fait que 3 lieues le premier jour, 5 le second, 7 le troisieme, & ainsi de suite en augmentant de 2 lieues chaque jour. On demande en combien de jours l'archer atteindra le voleur, & combien de lieues chacun aura fait.

POur résoudre cette question & ses semblables, ajoutez le nombre 2 des lieues que l'archer fait chaque jour plus que le précédent, à 16 double de 8, nombre des lieues que le voleur fait chaque jour, & ayant ôté de la somme 18 le double 6 du nombre 3 des lieues que l'archer a fait le premier jour, divisez le reste 12 par 2, nombre des lieues que le même archer fait de plus chaque jour : le quotient 6 fera connoître que l'archer atteindra le voleur au bout de six jours, & que par conséquent chacun aura fait 48 lieues, parce que 6 fois 8 font 48, & que la somme de ces six termes de la progression arithmétique 3, 5, 7, 9, 11, 13, fait aussi 48.

REMARQUE.

Cette quatrieme question est trop composée pour pouvoir n'être résolue que par les articles précédens. Elles peut servir de modele pour résoudre les autres semblables ; c'est-à-dire, que

dans ces ſortes de queſtions, il faut doubler le nombre des lieues données, où la progreſſion ne ſe rencontre point, ajouter à ce double la différence ou l'excès de la progreſſion arithmétique, ôter de cette ſomme le double du premier terme de cette progreſſion, & diviſer ce reſte par la différence des termes de la progreſſion : le quotient ſera le nombre des termes, qui étant multiplié par le nombre des lieues qui n'eſt point dans la progreſſion, donnera la ſomme de tous les termes.

QUESTION V.

On ſuppoſe que de Paris à Lyon il y a 100 lieues ; que deux couriers ſont partis en même tems, & par la même route, l'un de Paris pour aller à Lyon, en faiſant 2 lieues chaque jour plus que le précédent, & l'autre de Lyon pour venir à Paris, en faiſant 3 lieues chaque jour plus que le précédent : & que preciſément au milieu du chemin ils ſe ſont rencontrés ; le premier au bout de 5 jours, & le ſecond au bout de 4 jours. On demande combien de lieues ces deux couriers ont fait chaque jour.

POur ſçavoir combien de lieues a fait chaque jour celui qui, pour rencontrer l'autre, a employé 5 jours, ôtez ce nombre 5 de ſon quarré 25, & ayant multiplié le reſte 20 par 2, nombre des lieues que ce courrier a fait chaque jour plus que le précédent, ôtez le produit 40 du nombre 100 de la diſtance de Paris à Lyon : puis diviſez le reſte 60 par 10, double de 5, nombre des jours : le quotient 6 fera connoître que le courier a fait 6 lieues le premier jour, & par conſéquent 8 le ſecond

cond, 10 le troisieme, 12 le quatrieme, & 14 le cinquieme.

De même pour sçavoir combien de lieues a fait chaque jour celui qui, pour rencontrer l'autre, a employé 4 jours, ôtez ce nombre 4 de son quarré 16, & ayant multiplié le reste 12 par 3, nombre des lieues que ce courrier a fait chaque jour de plus, ôtez le produit 36 du nombre 100 de la distance de Paris à Lyon, puis divisez le reste 64, par 8, double de 4, nombre des jours, & le quotient 8 fera connoître que ce courier a fait 8 lieues le premier jour, & par conséquent 11 le second, 14 le troisieme, & 17 le quatrieme.

REMARQUE.

Cette cinquieme question comprend deux parties, qui peuvent fort bien se résoudre chacune par le troisieme article précédent, si l'on fait attention que 50, moitié de 100, est la somme des termes.

QUESTION VI.

Il y a un panier & cent pommes rangées en ligne droite, & éloignées par-tout d'un pas l'une de l'autre. On demande combien de pas feroit celui qui entreprendroit de cueillir ces pommes les unes après les autres, & de les rapporter dans le panier, qui resteroit toujours dans la même place.

Il est certain que pour la premiere pomme il faut faire deux pas, un pour aller & un pour revenir : que pour la seconde pomme il faut faire 4 pas, deux pour aller & deux pour revenir : que pour la troisieme pomme il faut faire 6 pas, trois pour aller & trois pour revenir : & ainsi du reste.

On a cette progreſſion arithmétique 2, 4, 6, 8, 10, &c. dont le dernier & plus grand terme ſera 200, qui eſt le double du nombre des pommes, auquel ajoutant le premier terme 2, & multipliant la ſomme 202, par la moitié 50 du nombre des pommes, qui eſt le nombre des termes, le produit 10100 ſera la ſomme de tous ces termes, ou le nombre des pas qu'on cherche.

REMARQUE.

Cette ſixieme queſtion ſe réſout par le quatrieme article, pour avoir le dernier terme 202, & par le premier, pour avoir la ſomme des termes 10100.

QUESTION VII.

Un marchand eſt convenu avec un de ſes créanciers de lui donner de l'argent chaque ſemaine : la premiere ſemaine il lui a donné cent livres, la ſeconde quatre cent livres, il a augmenté chaque ſemaine ſon payement de trois cents livres. On demande combien il a payé la vingt-huitieme ſemaine.

POur réſoudre cette queſtion, il faut multiplier 300 livres, différence de la progreſſion, par 27, nombre des ſemaines diminuées de l'unité, & ajouter 100 livres, premier terme, au produit 8100. La ſomme 8200 livres ſera le payement que le marchand aura fait la vingt-huitieme ſemaine.

REMARQUE.

La ſolution de cette ſeptieme queſtion n'eſt que l'application du quatrieme article. On peut s'exercer à chercher par le premier article quelle peut

être la somme qu'a payé le marchand pendant les vingt-huit semaines. Voyez Schooten dans ses *sectiones miscellaneæ*.

QUESTION VIII.

Un réservoir a douze canaux : par le second il s'écoule dans une heure deux pintes d'eau plus que par le premier : par le troisieme deux pintes plus que par le second, & ainsi de suite. On sçait que tous ces canaux laissent écouler 168 pintes d'eau dans une heure. On veut sçavoir combien chacun de ces canaux laisse écouler d'eau pendant une heure.

IL faut diviser 168, somme de la progression, par 6, moitié de 12, nombre des canaux ou des termes : du quotient 28 on ôtera 22, produit de 2, différence, par 11, nombre des termes diminués de l'unité, il restera 6, dont la moitié 3 est le premier terme de la progression, c'est-à-dire que le premier canal laissera écouler 3 pintes d'eau dans une heure, le second 5 pintes pendant le même tems, le troisieme 7 pintes, &c.

REMARQUE.

Cette huitieme question étant assez composée, ne peut se rapporter précisément à aucun des quatres articles précédens : mais elle peut servir de regle pour résoudre toutes les questions qui lui sont semblables.

QUESTION IX.

Un pere de famille ordonne par son testament, que

l'aîné de ses enfans prendra sur tous ses biens dix milles livres, & le septieme de ce qui restera; que le second prendra vingt mille livres, & le septieme de ce qui restera; que le troisieme prendra trente mille livres, & le septieme de ce qui restera, & ainsi de suite, en augmentant toujours de dix milles livres avec le septieme du restant. Les enfans ayant suivi la disposition du testament, il se trouve qu'ils ont été également partagés. On demande quel étoit le bien à partager, le nombre des enfans, & la somme que chacun a eu.

POur résoudre cette neuvieme question, & les autres qui lui sont semblables, il faut ôter 1 du dénominateur de la fraction, qui est ici 7; le reste 6 sera le nombre des enfans. Il faut ensuite quarrer ce reste 6, & multiplier son quarré 36 par la somme que doit prendre l'aîné des enfans, & qu'on a supposé ici être 10000 livres; le produit 360000 est le bien à partager. Divisant ce produit par 6, nombre des enfans, on trouve 60000 liv. qui est la somme que chacun des enfans a pris.

REMARQUE.

Si on veut se servir de l'algebre pour résoudre ces sortes de questions, on peut consulter les nouveaux élémens d'arithmétique & d'algebre, par M. de Lagny, de l'académie royale des sciences, pag. 417.

PROBLEME XI.

De la progression géométrique.

ON appelle *progression géométrique* une suite de plusieurs quantités qui croissent continuellement par la multiplication d'un même nombre,

comme 3, 6, 12, 24, 48, 96, &c. où chaque terme est double du précédent : ou bien 2, 6, 18, 54, 162, 486, &c. où chaque terme est triple du précédent. Ainsi des autres.

I.

La principale propriété de la progression géométrique est que, si on prend trois termes en proportion continue, comme 3, 6, 12, le produit 36 des deux extrêmes 3, 12, est égal au quarré du moyen 6. De même si on prend quatre termes en proportion continue, comme 3, 6, 12, 24, le produit 72 des deux extrêmes 3, 24, est égal au produit des deux moyens, 6, 12. Enfin si on prend un plus grand nombre de termes continuement proportionnels, comme ces six, 3, 6, 12, 24, 48, 96, le propuit 288 des deux extrêmes 3, 96, est égal au produit des deux 6, 48, qui en sont également éloignés, ou des deux 12, 24, qui en sont aussi également éloignés. D'où il est aisé de conclure que, lorsque le nombre des termes est impair, ce produit est égal au quarré du terme moyen, comme il arrive dans ces cinq termes 3, 6, 12, 24, 48. Car le produit 144 des deux extrêmes 3, 48, ou des deux 6, 24, qui en sont également éloignés, est le quarré du terme moyen 12.

Ainsi vous voyez que ce qui convient à la progression arithmétique par addition, convient à la progression géométrique par multiplication. Mais il y a une autre différence considérable entre ces deux progressions ; c'est que dans la progression arithmétique les différences des termes sont égales, au lieu que dans la progression géométrique elles sont toujours inégales ; elles conservent entre elles la même progression géométrique ; & quoi-

qu'on prenne à l'infini les différences des différences, on ne peut jamais parvenir à des différences égales. Ainsi l'on voit que dans cette progression géométrique 2, 6, 18, 54, 162, 486, les différences des termes font cette semblable progression géométrique 4, 12, 36, 108, 324, ou les différences des termes font aussi cette semblable progression géométrique 8, 24, 72, 216, & ainsi de suite.

Si on prend trois termes proportionnels, comme 2, 6, 18, le cube 216, du moyen 6, est égal au produit solide qui vient de la multiplication des trois nombres 2, 6, 18. De même si on prend quatre nombres continuement proportionnels, comme 2, 6, 18, 54, le cube 216 du second 6 est égal au produit solide qu'on a en multipliant le quatrieme 54 par 4, quarré du premier 2; & le cube 5832 du troisieme 18, est égal au produit solide qui vient en multipliant le premier 2 par 2916, quarré du quatrieme 54.

II.

On connoît aisément, par ce qui a été dit jusqu'à présent, que *pour trouver un moyen géométrique proportionnel entre deux nombres donnés*, comme entre 2 & 18, il faut multiplier ensemble les deux nombres donnés 2, 18, & prendre la racine quarrée 6 de leur produit 36, qui sera le moyen proportionnel qu'on cherche.

Et *pour trouver deux moyens géométriques continuement proportionnels entre deux nombres donnés*, comme entre 2 & 54, il faut multiplier le dernier 54 par 4, quarré du premier 2, & la racine cubique 6 du produit 216 sera le premier moyen proportionnel; lequel étant multiplié par 54, second

nombre donné, donnera pour produit 324, dont la racine quarrée 18, sera l'autre moyen proportionnel qu'on cherche.

III.

Mais *pour trouver un moyen proportionnel arithmétique entre deux nombres donnés*, comme entre 2 & 8, il faut prendre 5, moitié de 10, somme des nombres donnés, 2, 8. Cette moitié 5 sera le moyen proportionnel qu'on cherche.

Et *pour trouver deux moyens arithmétiques continuement proportionnels entre deux nombres donnés*, comme entre 2 & 11, on ôtera 2, le plus petit nombre donné, du plus grand 11; on ajoutera séparément au même plus petit 2, le tiers 3 du reste 9, & 6 double de ce tiers, & l'on aura 5 & 8, pour les deux moyens proportionnels qu'on cherche.

Ou bien on ajoutera au plus grand 11 des deux nombres donnés, le double 4 du plus petit 2, & réciproquement au plus petit 2, le double 22 du plus grand 11, & les tiers des deux sommes 15, 24, donneront 5 & 8 pour les deux moyens qu'on cherche.

IV.

Il est évident que toutes les puissances par ordre d'un même nombre, comme de 2, font une progression géométrique, telle qu'est la suivante,

1	2		4				8	
2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256,	&c.
1	1		1				1	
3	5		17				257	

où vous voyez que toutes les puissances du nom-

bre 2, dont les exposans 1, 2, 4, 8, 16, &c. sont les termes d'une progression géométrique, sçavoir 2, 4, 16, 256, &c. sont telles que si à chacune on ajoute l'unité, les sommes 3, 5, 17, 257, &c. sont des nombres premiers. Par où il est aisé de trouver un nombre premier plus grand que quelque nombredonné que ce soit.

V.

Les termes d'une progression géométrique peuvent aller en augmentant ou en diminuant; mais quelle que soit la progression, *on pourra la continuer à l'infini*, si connoissant les deux premiers termes, on divise le quarré du second terme par le premier, le quotient sera le troisieme terme; si on divise ensuite le quarré du terme trouvé par le terme précédent, le quotient sera le terme suivant, & ainsi de suite. Soient donnés 2, 4, premiers termes d'une progression. Pour la continuer à l'infini, il suffit de diviser 16, quarré du second terme 4, par le premier 2, le quotient 8 sera le troisieme terme; on divisera ensuite 64, quarré du troisieme terme 8, par le terme précédent 4, & le quotient 16 sera le quatrieme terme. Ainsi du reste.

Quand la progression va en augmentant, il est plus aisé de diviser le second terme par le premier, & de multiplier le second terme par le quotient qu'on appelle exposant de la raison : le produit donne le troisieme terme. On multiplie ensuite ce troisieme terme par le même exposant, ce produit donne le quatrieme terme. On continue la même opération, pour avoir autant de termes qu'on voudra.

VI.

Pour trouver quelque terme que ce soit d'une pro-

gression dont on connoît le premier & le second terme; si elle va en augmentant, comme celle-ci, 2, 4, 8, 16, & qu'on veuille connoître le huitieme terme, il faut diviser le second terme 4 par le premier 2, il viendra 2 pour exposant de la progression; il faut ensuite multiplier cet exposant 2, 7 fois par lui-même, nombre du terme qu'on cherche diminué de l'unité, c'est-à-dire, qu'il faut prendre la septieme puissance de 2, qui est 128, qu'on multipliera par le premier terme 2; le produit 256 sera le huitieme terme qu'on demande.

VII.

Si on propose une progression géométrique qui aille en augmentant, comme celle-ci, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, le premier terme 2 est au second 4, comme la somme de tous les termes moins le dernier 256, est à la somme de tous les termes moins ce premier 2. Ainsi, *pour avoir la somme de tous les termes d'une progression qui va en augmentant*, comme de la précédente, il faut multiplier le dernier terme 256 par le second 4, retrancher du produit 1024, le quarré 4 du premier terme 2, & diviser le reste 1020 par 2, différence du second terme 4 au premier 2; le quotient 510 sera la somme de tous les termes de la progression proposée.

VIII.

Si l'on continue à l'infini une progression géometrique en décroissant, comme 6, 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, &c. la différence 4 des deux premiers termes 6, 2, est au premier 6, comme le même premier 6 est

à la somme de tous les termes infinis. C'est pourquoi, *pour trouver la somme de tous les termes infinis d'une progression géométrique qui décroît*, comme de la proposée, 6, 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, &c. il faut diviser le quarré 36 du premier terme 6, par la différence 4 des deux premiers 6, 2, & le quotient 9 sera la somme qu'on cherche, de laquelle ôtant 8, somme des deux premiers termes 6, 2, il restera 1 pour la somme de ces fractions infinies continuement proportionnelles $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, &c. On connoîtra de la même façon, que la somme de toutes ces fractions infinies continuement proportionnelles $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, &c. vaut aussi 1.

REMARQUE.

Quand on parle de quantités proportionnelles sans spécifier, cela s'entend toujours de la proportion géométrique. Nous dirons ici en passant, que si de l'unité, comme numérateur, & des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. comme dénominateurs, on fait cette suite de fractions, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. qui vont toujours en diminuant, ces fractions étant prises consécutivement de trois en trois, comme l'on voudra, seront en proportion harmonique; c'est à-dire, que la premiere de ces trois sera à la troisieme, comme la différence des deux premieres est à la différence des deux dernieres. Ce que l'on connoîtra encore mieux en réduisant ces fractions en même dénomination, ou en entiers, comme on le voit ici pour les cinq fractions $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, en les multipliant par le même nombre 60, qui est divisible par tous les dénominateurs 2, 3, 4, 5; car à la place de ces cinq fractions, on aura ces

cinq nombres entiers 60, 30, 20, 15, 12, dont les trois premiers 60, 30, 20, sont en proportion harmonique. Car le premier 60 est au troisieme 20, qui en est la troisieme partie, comme la différence 30 des deux premiers est à la différence 10 des deux derniers, qui en est aussi la troisieme partie. C'est par un semblable raisonnement, que l'on connoîtra que ces trois nombres 30, 20, 15, sont en proportion harmonique, aussi-bien que ces trois autres 20, 15, 12.

QUESTION I.

Un grand navire en poursuit un plus petit, dont il est éloigné de 4 lieues, & il va deux fois plus vite que le plus petit : ils sont sur le même rumb. On demande le chemin que le grand navire doit faire pour atteindre le petit.

PArce que la distance des deux navires est 4, & que leurs vîtesses sont en raison double, continuez à l'infini cette progression géométrique double 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c, dont le premier & le plus grand terme soit 4 : cherchez la somme de tous ces termes infinis, en divisant 16, quarré du premier 4, par la différence 2 des deux premiers 4, 2, vous aurez 8 pour cette somme, qui fera connoître que lorsque le grand navire aura fait huit lieues, il atteindra le petit.



QUESTION. II.

On suppose qu'Achille aille dix fois plus vîte qu'une tortue qui auroit une lieue d'avance. On demande s'il est possible qu'Achille attrappe cette tortue, & à quelle distance il l'attrappera.

ON a fait cette question, parce que Zenon, chef des philosophes appellés stoïciens, prétendoit qu'Achille ne pourroit jamais attrapper la tortue. Car tandis qu'Achille, disoit ce philosophe, feroit la premiere lieue, la tortue feroit le dixieme de la seconde lieue; & tandis qu'Achille feroit le dixieme de la seconde lieue, la tortue feroit le dixieme de cette dixieme, ou un centieme; & ainsi à l'infini.

Ce philosophe supposoit faussement que tous ces dixiemes composoient un espace infini; mais il est aisé de faire voir qu'ils sont cette progression géométrique, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c. dont les termes vont en diminuant à l'infini. On trouvera la somme de tous ces termes infinis en divisant 1, quarré du premier terme par 1, moins $\frac{1}{10}$, ou $\frac{9}{10}$, différence du premier & du second terme; le reste est $\frac{10}{9}$, ou $1\frac{1}{9}$. Ce qui fait voir qu'Achille attrappera la tortue, quand il aura parcouru la premiere lieue, & le neuvieme de la seconde lieue.

QUESTION III.

Une pendule a deux aiguilles, l'une des heures, & l'autre des minutes. Supposant qu'elles partent

toutes deux du point de midi, on demande en quel autre point elles doivent ſe rencontrer.

PUiſque l'une des deux aiguilles va douze fois plus vîte que l'autre, & que quand celle des heures eſt au point de midi, celle-ci a un tour d'avance plus que celle-là. Leur mouvement formera donc cette progreſſion géométrique 1 $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{144}$, &c. qui décroît à l'infini : par conſéquent ſi l'on diviſe le quarré du premier terme 1, par la différence du premier au ſecond $\frac{11}{12}$, on connoîtra que ces deux aiguilles ſe rencontreront à 1 $\frac{1}{11}$, c'eſt-à-dire, à une heure & un onzieme d'heure.

D'où il eſt aiſé de conclure que ces aiguilles ſe rencontreront à ces heures-ci 1 $\frac{1}{11}$, 2 $\frac{2}{11}$, 3 $\frac{3}{11}$, 4 $\frac{4}{11}$, 5 $\frac{5}{11}$, 6 $\frac{6}{11}$, 7 $\frac{7}{11}$, 8 $\frac{8}{11}$, 9 $\frac{9}{11}$, 10 $\frac{10}{11}$, 11 $\frac{11}{11}$, ou 12 heures.

REMARQUE.

On voit bien que ces trois premieres queſtions ſe réſolvent par l'article VIII précédent.

QUESTION IV.

Un maquignon vend un très-beau cheval, il ſe contente du prix du vingt-quatrieme clou du cheval, pourvu qu'on veuille compter de maniere que du premier clou on donnât 1 denier, du ſecond 2 deniers, du troiſieme 4 deniers, & ainſi de ſuite, en doublant les deniers juſqu'au vingt-qua-

trieme clou. On demande de quel prix seroit le cheval.

PUisque le prix des cloux forme cette progression 1, 2, 4, 8, 16, &c. qui va en augmentant, il faut prendre la vingt-troisieme puissance de 2 exposant de la progression, ce sera 8388608 deniers, ou trente-quatre mille neuf cent cinquante-deux livres dix sols huit deniers, pour le prix du cheval.

REMARQUE.

La solution de cette question dépend du sixieme article ; on n'a point multiplié la vingt-troisieme puissance de 2 par le premier terme, qui est ici l'unité, parce qu'elle ne change rien dans la multiplication. C'est une chose à remarquer dans les progressions qui commencent par l'unité.

QUESTION V.

Une vieille dame possede trente-deux belles terres ; elle est fort avare, elle aime l'argent encore plus que ses terres, elle voudroit en vendre quelques-unes, afin d'avoir le plaisir de marcher sur l'or; mais pour ne point effrayer un de ses héritiers, qui est homme de cœur, elle ne propose d'abord que la moindre à vendre, sous pretexte que l'argent est rare, & qu'elle a quelques dettes à payer, quoique ses coffres soyent pleins. On offre de lui donner pour cette terre, la somme qui conviendroit à la trente-deuxieme de ses terres, si on payoit 1 sol pour la premiere, 2 sols pour la seconde, 4 sols pour la troisieme, & ainsi de suite, en doublant les sols jusqu'à la trente-deuxieme terre.

Cette dame apprehende d'être trompée, elle demande quel prix on lui donneroit de sa terre.

ON peut aisément la rassurer, elle trouvera son compte à vendre sa terre à la condition qui lui a été offerte. L'acheteur seroit obligé de lui donner 107 millions 374 mille 182 livres huit sols.

REMARQUE.

On peut s'exercer à trouver ce nombre, en cherchant la trente-unieme puissance de 2 exposant de la progression, suivant l'article VI, & ce qui a été dit dans la remarque de la question précédente.

QUESTION VI.

On suppose qu'un grain de bled produise 50 autres grains dans la premiere année; qu'on seme ces 50 grains, & qu'ils produisent chacun 50 grains la deuxieme année, & ainsi de suite. On demande quel sera le nombre des grains de bled qui seront produits pendant douze ans.

CE nombre de grains de bled produit pendant douze ans est trés-considerable. Il faut d'abord trouver le douzieme terme de cette progression géométrique 1, 50, 2500, 125000, &c. qui va en augmentant. Ce douzieme terme contient ces chifres, 48, 828, 125, accompagnés de onze zéros, & pour touver la somme demandée, il faudroit, suivant l'article VII, multiplier encore ce douzieme terme par le second 50: ôter 1, quarré du premier terme de ce produit, & diviser le reste par 49, différence du second ter-

me au premier. On conçoit qu'il viendroit un nombre très-grand.

REMARQUE.

Cette question est embarrassante dans le calcul, à cause de la grande raison qui est entre les termes: mais on pourra appliquer ici la quatrieme question, & demander quel seroit le prix des vingt-quatre clous d'un cheval, en payant le premier 1 denier, le second 2 deniers, le troisieme 4 deniers, &c. On trouvera que ce prix seroit de 16,777,215 deniers, ou de 69,905 livres 1 sol 3 deniers.

La question cinquieme trouveroit ici sa place, si l'on vouloit chercher quelle seroit la somme qu'il faudroit payer pour les trente-deux terres aux conditions qui ont été offertes.

QUESTION VII.

JE renfermerai dans cette question plusieurs autres, que je ne ferai que proposer. On cherchera quel peut avoir été le nombre des hommes deux cens ans après Adam, en supposant qu'ils ayent tous vécu, & que cette famille fût seulement augmentée de quatre personnes la premiere dixaine d'années, de huit la seconde dixaine, de seize la troisieme dixaine, & ainsi de suite de dix ans en dix ans, suivant la progression double, qui est 2, 4, 8, 16, &c. le nombre des termes de cette progression est 20, dont il faut trouver le dernier par l'article VI, & la somme de tous ces termes par l'article VII. On jugera de cette somme par le dernier terme, qui est d'un million 48 mille 576 personnes.

2. On

2. On examinera de combien la famille de Jacob, qui entra en Egypte avec 70 personnes, put être augmentée 200 ans après son arrivée, en supposant seulement que dans les vingt premieres années elle ait été augmentée de trois fois autant, c'est à-dire, qu'au bout de 20 ans il y ait eu 210 personnes, & ainsi de suite : ce qui est très-croyable. On trouvera qu'à la fin des vingt dernieres années elle a pu être composée d'un million 177 mille 810 personnes. Art. VI.

3. Qui croira que les revenus du grand-seigneur ne seroient pas capables de nourrir pendant douze ans la race d'une truie qui auroit porté d'une ventrée 6 petits cochons, dont 2 seroient mâles & les quatre autres femelles. C'est cependant une chose très-véritable, en supposant même que les quatre femelles ne portent chacune la premiere année que six petits cochons, dont 4 seront encore femelles & 2 mâles, & que chaque femelle en porte autant les années suivantes pendant douze ans. Cela supposé, on connoîtra que le nombre de tous les cochons, pendant ce tems, montera à 33 millions 554 mille 230. Supposant à présent qu'il ne faille qu'un écu par an pour chaque cochon, on jugera si le grand-seigneur est assez puissant pour nourrir la race d'une seule truie pendant douze ans.

REMARQUE.

Il y a une attention à faire sur le calcul de cette somme. Il faut partager le nombre 6 des premiers petits cochons en deux termes, dont l'un, qui est 2, sera le premier terme de la progression des mâles, & l'autre, qui est 4, sera le premier terme

de la progreſſion des femelles. Ainſi il ſera aiſé de connoître que la premiere progreſſion eſt 2, 4, 8, 16, 32, &c. & que la ſeconde eſt 4, 16, 64, 256, &c. On ajoutera les ſommes des 12 termes de ces deux progreſſions, & l'on aura le nombre des petits cochons, tant mâles que femelles.

4. On ſe convaincra que le monde entier ne pourra contenir toute la ſemence qui ſeroit produite d'un ſeul grain de moutarde pendant vingt-cinq ans, ſi on ſuppoſe qu'un grain de moutarde en produiſe mille chaque année.

5. On ſera étonné du nombre prodigieux des poiſſons, ſi la plus grande partie de leurs œufs étoient féconds; il n'y auroit qu'à ſupputer combien il viendroit de carpes d'une ſeule carpe pendant quelques années, & porter un jugement ſemblable pour tous les autres poiſſons.

6. Ce n'eſt point les animaux les plus féconds qui peuvent nous jetter dans l'étonnement : la fécondité des brebis même, qui ne portent qu'une fois par an, pourroit étonner leur maître, ſi on avoit ſoin de conſerver tous les agneaux qui naiſſent pendant quelques années.

On peut connoître, ſuivant ce qu'on a dit dans les articles précédens, en faiſant quelques ſuppoſitions, que tous les agneaux d'un grand troupeau de brebis peuvent ſe monter à plus de 25500 pendant l'eſpace de huit ans.

PROBLEME XII.

Des quarrés magiques.

ON appelle *quarré magique* un quarré diviſé en pluſieurs autres petits quarrés égaux,

ou cases remplies de termes d'une progression qui y sont tellement disposés, que tous ceux d'une même bande, ou d'un même rang, tant en long qu'en large & en diagonale ajoutés ensemble, font une même somme, ou multipliés, donnent un même produit.

Il suit de la définition qu'on vient de lire, qu'il y a deux especes de quarrés magiques, les uns sont formés par les termes d'une progression arithmétique, les autres sont formés par les termes d'une progression géométrique.

Ces quarrés sont pairs ou impairs; les quarrés impairs sont ceux qui contiennent un nombre impair de cases, & les pairs sont ceux qui tiennent un nombre pair de cases.

Des quarrés magiques impairs, formés par des termes en progression arithmétique.

LE quarré magique suivant est un quarré impair; il est divisé en 25 petites cases égales, où les 25 premiers nombre naturels 1, 2, 3, 4, &c. sont tellement disposés, que la somme de chaque rang, soit de haut en bas, soit de droite à gauche, soit en diagonale, est par-tout 65.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Dans tout *quarré impair*, la somme des nombres de chaque rang ou de chaque diagonale, est égal au produit de la racine du quarré impair & du terme moyen de la progression arithmétique. La

ſomme 65 des nombres de chaque rang ou de chaque diagonale de ce quarré impair 25, eſt égale au produit de 5 ſa racine, & de 13 terme moyen de la progreſſion arithmétique 1, 2, 3, 4, &c. Ce terme moyen ſe trouve dans la caſe du milieu du quarré, qui contient les nombres naturels, comme on le peut voir dans le quarré ſuivant.

Cette ſomme 65 ſe trouve auſſi en diſpoſant les termes donnés de la progreſſion arithmétique, ſelon leur ſuite naturelle 1, 2, 3, 4, &c. dans quelques rangs de caſes de ce quarré, qui ſont les deux rangs du milieu qui traverſent le quarré du haut en bas, & de gauche à droite, & chaque rang diagonal, c'eſt-à-dire, qui va d'un angle du quarré à l'autre angle. La même choſe arrivera aux quarrés pairs qui ſont des quarrés qui contiennent un nombre quarré pair de caſes.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Pour diſpoſer magiquement dans les caſes d'un quarré impair, par exemple, de celui-ci, dont le côté eſt 5, ou qui a 25 caſes, autant de nombres donnés en progreſſion arithmétique, comme 1, 2, 3, 4, 5, & ainſi de ſuite jusqu'au dernier & plus grand 25, écrivez le premier &

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

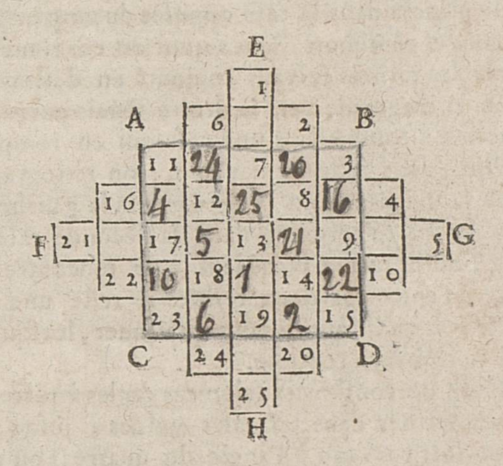
plus petit 1, dans la case qui répond immédiatement sous celle du milieu, où est le centre du quarré, & suivant la diagonale vers la droite, écrivez le second terme 2 dans la case voisine & plus basse de la bande qui suit vers la droite. Continuez ainsi jusqu'à ce que vous ayez rempli la plus basse case, comme il arrive ici au second terme 2.

Après cela, parce qu'en continuant selon la diagonale de la gauche vers la droite, le terme suivant 3, se rencontre en dehors, on le placera à la case opposée de la bande où il se rencontrera. Et parce qu'en continuant selon la diagonale vers la droite, le terme suivant 4 se trouve aussi en dehors, on le placera dans la case opposée du rang où il se rencontre en dehors. Après quoi on continuera à placer les termes suivans toujours en descendant selon la diagonale vers la droite. Mais parce que le terme 6 tombe dans une case qui est remplie, sçavoir, dans celle où il y a 1, on rétrogradera selon la diagonale de la droite vers la gauche, & l'on écrira ce terme 6 dans la seconde case du rang, où le terme précédent 5 se rencontre : en sorte qu'entre ces deux termes il reste une case vuide ; ce qu'il faut toujours pratiquer, lorsqu'une case se trouvera remplie.

Enfin on continuera selon ces regles à placer les autres termes dans les cases vuides, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à l'angle du quarré, où dans cet exemple le terme 15 se rencontre. Alors comme on ne peut plus se conduire selon la diagonale en descendant vers la droite, pour placer le terme suivant 16, on le placera dans la seconde case d'en haut du même rang. Après quoi les autres termes se placeront dans les autres cases vuides

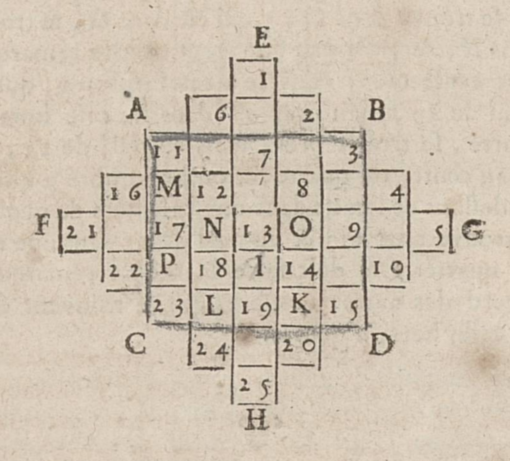
comme les précédens, ſans qu'il puiſſe arriver quelque nouvelle difficulté.

Il ſera aiſé d'exécuter la diſpoſition de ce quarré & des autres de la même eſpece, ſi on ſuit cette méthode. Après avoir fait un quarré impair comme celui-ci, ABCD, de 25 caſes, élevez de chaque côté, en continuant les caſes, excepté celles qui ſont aux coins, A, B, C, D, d'autres lignes hors de ce quarré, telles que vous les voyez ici repréſentées. Ces caſes hors du quarré iront en diminuant; en ſorte qu'il s'en trouvera une qui ſera la plus éloignée de chaque côté, telle que ſont E, F, G, H. Vous choiſirez celle d'en haut E,



pour placer l'unité; enſuite en tirant vers la droite BD, & ſuivant la diagonale, vous placerez dans une ſeconde caſe le nombre 2, puis en ſuivant toujours la meme diagonale, vous placerez les nombres 3, 4, 5, dans les caſes du quarré &

hors du quarré, jusqu'à ce que vous soyez parvenu à la case unique G, la plus éloignée hors du quarré, du coté BD, qui est à droite. Après cela vous retournerez à la seconde case hors du quarré à côté de 1 vers la gauche, où vous marquerez 6; puis en suivant toujours la diagonale, & tirant à droite vers BD, vous écrirez les chiffres 6, 7, 8, 9 & 10, qui est placé dans une derniere case hors du quarré; alors vous reviendrez à la case gauche A, la plus proche de celle qui contient 6; vous y écrirez 11, & les autres nombres 12, 13, 14, 15, dans les cases suivantes, en suivant la diagonale, & tirant à droite vers BD. Vous ferez pour le reste des nombres du quarré impair la même chose qu'on vient de faire, jusqu'à ce que vous soyez arrivé au nombre quarré impair, qui est ici 25, & qui se trouvera dans la derniere case d'en bas H, hors du quarré,



dans les cases du quarré vuide & opposées des mêmes rangs où ils se trouvent, comme 1 dans I, 2 dans K, 6 dans L, 4 dans M, 5 dans N, 21 dans O, & ainsi des autres, vous aurez la disposition du quarré magique impair de 25, telle qu'elle est rapportée ci-dessus.

Pages 83 & 84.

Vous auriez une autre disposition des nombres dans les cases, si en commençant par la case unique hors du quarré d'en haut, au lieu de placer les nombres en tirant vers la droite, vous les placiez en tirant vers la gauche, mettant 2 dans la case où se trouve 6, mettant 13 dans celle qui est occupée par 11, &c.

Observez généralement que les nombres des cases uniques hors du quarré, comme E, F, G, H, se doivent trouver dans les cases vuides les plus proches, mais au-delà de celle qui est au centre; comme on le voit dans le quarré précédent, où 1 qui est dans E, se trouve dans M; 21 qui est dans F, se trouve dans O; 5 qui est dans G, se trouve dans N, &c. Ce que l'on peut encore remarquer plus exactement dans le quarré suivant, qui est celui de 49, où 1 qui est dans E, case hors du quarré, se trouve près, mais au-delà de 25, qui est au centre du quarré, & où le nombre 9 qui est au-dessous de l'unité dans une case hors du quarré, se trouve plus loin & au-delà de 25 dans une case du quarré. On doit faire la même remarque à l'égard des autres nombres qui se trouvent dans les cases hors du quarré.



E

						1						
					8		2					
				15		9		3				
			22		16		10		4			
		29		23		17		11		5		
	36		30		24		18		12		6	
43		37		31		25		19		13		7
	44		38		32		26		20		14	
		45		39		33		27		21		
			46		40		34		28			
				47		41		35				
					48		42					
						49						

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

La diſpoſition ſeroit encore différente, ſi on commençoit à mettre l'unité dans quelque autre caſe unique hors du quarré, & qu'on continuât à écrire les autres nombres dans l'ordre qu'on a in-

diqué, les nombres du quarré impair se trouveroient dans d'autres cases, & donneroient par conséquent plusieurs dispositions différentes du quarré impair.

Ce ne sont point là les seules variétés qu'on peut trouver dans le quarré magique impair. Il n'est pas nécessaire de commencer par l'unité, on peut encore commencer par tel nombre qu'on voudra choisir, comme par 7, & poursuivre les nombres jusqu'à ce qu'il y en ait assez pour remplir les cases du quarré, ce qui donneroit cet autre quarré magique.

				7				
			12		8			
		17		13		9		
	22		18		14		10	
27		23		19		15		11
	28		24		20		16	
		29		25		21		
			30		26			
				31				

17	30	13	26	9
10	18	31	14	22
23	11	19	27	15
16	24	7	20	28
29	12	25	8	21

Non-ſeulement on peut ſe ſervir des nombres pris ſelon leur ſuite naturelle, quels qu'ils ſoient, pourvu qu'ils puiſſent remplir un quarré de caſes impairs, on peut encore en prendre d'autres, mais il faut qu'ils ſoient dans une progreſſion arithmétique, comme celle-ci qui commence par 13, 17, 21, &c. dont la différence eſt 4, & qui donne ce quarré impair. Car en quelque ſens qu'on prenne les bandes & les diagonales, la ſomme de chacune ſera 305.

53	105	37	89	21
25	57	109	41	73
77	29	61	93	45
49	81	13	65	97
101	33	85	17	69

Les termes du quarré magique de 49, peuvent avoir d'autres diſpoſitions magiques, telles que ſont les ſuivantes; nous les avons trouvés par une autre maniere, qui n'étant pas ſi aiſée que la précédente, ne ſera pas ici expliquée, parce qu'elle eſt trop difficile pour être inſérée dans des récréations mathématiques.

3	10	25	16	11
20	8	19	12	6
5	9	13	17	21
22	14	7	18	4
15	24	1	2	23

12	25	6	19	3
5	11	24	8	17
16	4	13	22	10
9	18	2	15	21
23	7	20	1	14

1	20	23	16	5
4	18	9	12	22
15	7	13	19	11
24	14	17	8	2
21	6	3	10	25

11	24	17	10	3
4	12	25	18	6
7	5	13	21	19
0	8	1	14	22
23	16	9	2	5

11	22	9	20	3
2	14	25	8	16
19	5	13	21	7
10	18	1	12	24
23	6	17	4	13

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

REMARQUES.

LE quarré a été appellé *magique*, parce qu'il étoit en grande vénération parmi les Egyptiens, & les pythagoriciens leurs disciples, qui pour donner plus d'efficace & de vertu à ce quarré, le dédioient aux sept planetes en différentes manieres, & le gravoient sur une lame du métal qui sympatisoit avec la planete à laquelle il étoit dédié. Ils l'enfermoient dans un poligone régulier, inscrit dans un cercle, divisé en autant de parties égales que le côté du quarré avoit d'unités, avec les noms des anges de la planete, & des signes du zodiaque, qu'ils écrivoient dans les espaces vuides entre le poligone & la circonférence du cercle circonscrit; croyant par une vaine supersti-

tion qu'une telle médaille ou talisman, étoit favorable à celui qui la portoit sur soi en tems & lieu.

Ils attribuoient à Saturne le quarré de 9 cases, qui a trois pour racine, & 15 pour la somme des nombres de chaque bande. A Jupiter le quarré de 16 cases, qui a 4 pour côté & 34 pour la somme des nombres de chaque bande. A Mars le quarré de 25 cases, qui a 5 pour côté, & 65 pour la somme des nombres de chaque bande. Au soleil le quarré de 36 cases, qui a 6 pour côté, & 111 pour la somme des nombres de chaque bande. A Vénus le quarré de 49 cases, qui a 7 pour côté, & 175 pour la somme des nombres de chaque bande. A Mercure le quarré de 64 cases, qui a 8 pour côté, & 260 pour la somme des nombres de chaque bande. A la lune le quarré de 81 cases, qui a 9 pour côté, & 369 pour la somme des nombres de chaque bande.

Enfin ils attribuoient à la matiere imparfaite le quarré de 4 cases, qui a 2 pour côté, & à Dieu le quarré d'une seule case, qui a pour côté l'unité, qui étant multipliée par elle-même, ne change pas. Par le moyen de ce problême, nous résoudrons la question suivante.

QUESTION.

Disposer en trois rangs les neuf premieres cartes, depuis l'as jusqu'au neuf, de sorte que tous les points de chaque rang pris en long, ou en large, ou en diagonale, fassent ensemble une même somme.

ON disposera magiquement les neuf premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

comme vous voyez ici, par la méthode que nous avons enſeignée. Alors on connoîtra que les cartes marquées des mêmes points qui ſont les chiffres de chaque caſe, doivent être rangées de la même façon, afin que la ſomme de tous les points de chaque rang ſoit par tout la même, ſçavoir, 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Voici de quelle maniere on diſpoſera ces cartes, pour les ranger comme elles le ſont dans le quarré magique précédent.

		1		
	4		2	
7		5		3
	8		6	
		9		

Au lieu de prendre les neuf premieres cartes, on en pourroit prendre neuf autres, pourvu qu'elles fuſſent de ſuite, comme celles-ci, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 : alors elles auroient cette diſpoſition & la ſomme de chaque bande ou diagonale ſeroit 18. On peut encore laiſſer le 2 & prendre le valet, en le faiſant valoir 11, &c.

		2		
	5		3	
8		6		4
	9		7	
		10		

5	10	3
4	6	8
9	2	7

Des quarrés magiques pairs formés par des termes en progreſſion arithmétique.

LA regle qu'on vient d'enſeigner, eſt générale pour diſpoſer facilement toutes ſortes de quarrés impairs. Il n'en eſt pas de même pour les

quarrés pairs. Ceux-ci ont des regles particulieres quoique fondées sur une démonstration générale. Le quarré de 4 ne peut être disposé magiquement: le quarré de 16 est celui de tous les quarrés pairs qui le peut être plus aisément. C'est même par lui qu'on doit commencer quand on veut disposer magiquement un plus grand quarré pair. Voici ce qu'il faut faire.

Ayant fait un quarré A B C D, on remplira d'abord les diagonales AD, BC. Pour y réussir, on commencera par compter les nombres suivant leur suite naturelle 1, 2, 3, 4, &c. sur les cases de la premiere bande AB, de gauche à droite, & on ne marquera que 1 & 4, dans les cases A & B, qui appartiennent aux diagonales: on comptera ensuite les autres nombres 5, 6, 7, 8, sur les cases de la seconde bande EF, de gauche à droite, & l'on ne marquera que 6 & 7, dans les cases qui appartiennent aux diagonales: puis on comptera 9, 10, 11, 12, sur les cases de la troisieme bande GH, de gauche à droite, & l'on ne marquera que 10 & 11, dans les cases qui appartiennent aux diagonales. Enfin on comptera 13, 14, 15, 16, sur les cases de la quatrieme bande CD, de gauche à droite, & l'on ne marquera que les nombres 13 & 16 dans les cases C & D, qui appartiennent aux diagonales.

A					B
	1			4	
E		6	7		F
G		10	11		H
	13			16	
C					D

Ces diagonales étant ainsi remplies, on remplira les cases vuides: on commencera par compter les nombres suivant leur ordre naturel 1, 2, 3, 4, sur les cases de la bande DC, en commen-

çant par la caſe D, & allant ici de droite à gauche, & l'on écrira le 2 & le 3 dans les caſes vuides : on continuera de même par les bandes HG, FE & BA, en allant toujours de droite à gauche. Le quarré ſera rempli de maniere que la ſomme de chaque bande & de chaque diagonale ſera 34, en quelque ſens qu'on les prenne.

A B

	1	15	14	4	
E	12	6	7	9	F
G	8	10	11	5	H
	13	3	2	16	

C D

On voit bien que pour donner quelque variété à ce quarré pair, on pourroit commencer à compter par la caſe B, & aller de droite à gauche, pour remplir les diagonales, & puis commencer à compter à la ſeconde repriſe par la caſe C, & aller de gauche à droite pour remplir les caſes vuides. En un mot, on peut commencer par telle caſe de la diagonale qu'on voudra, & aller de droite à gauche, ou de gauche à droite, de haut en bas, ou de bas en haut; mais quand on a commencé à compter d'une façon pour remplir les diagonales, il faut aller d'un ſens oppoſé & contraire pour remplir les caſes du milieu. Au reſte, ce ne ſont pas là les ſeules variétés dont eſt ſuceptible le quarré de 16, on ſera peut-être étonné d'entendre dire qu'il peut recevoir 880 diſpoſitions différentes. Nous avons donné la maniere la plus aiſée.

Il n'eſt point néceſſaire que les nombres du quarré pair commencent par l'unité, on peut prendre 16 nombres de ſuite, comme 11, 12, 13, 14, &c. que l'on diſpoſera magiquement par la méthode qu'on vient d'enſeigner.

11	25	24	14
22	16	17	19
18	20	21	15
23	13	12	26

Ce

Ce quarré de 16 eſt le fondement du quarré de 36. Car quand on a formé ce quarré de 16, dont on a pris les termes qui ſont le plus au milieu de 36, on forme une enceinte à l'entour, dans laquelle on diſpoſe les dix premiers nombres & les dix derniers de 36 ; de telle ſorte que les deux qui correſpondent dans le même rang, ou dans la même diagonale, faſſent la ſomme de 37. Ce que l'on peut examiner dans ce quarré de 36, où la ſomme de chaque bande & de chaque diagonale eſt 111.

1	35	34	30	5	6
33	11	25	24	14	4
8	22	16	17	19	29
28	18	20	21	15	9
10	23	13	12	26	27
31	2	3	7	32	36

Pour avoir les 16 nombres qui ſont le plus au milieu de 36, il faut ôter 16 de 36, & diviſer le reſte 20 par 2, le quotient 10 marque qu'il faut rejetter les premiers & les derniers 10 de 36 ; ainſi les 16 nombres commenceront à 11, & finiront à 26.

Je ne crois pas qu'il ſoit néceſſaire d'avertir, qu'au lieu des nombres, dont la ſuite eſt naturelle, on peut choiſir d'autres nombres qui ſoient dans une progreſſion arithmétique. C'eſt une remarque qui a été faite pour les quarrés impairs, & qui convient auſſi aux quarrés pairs.

On a mis ici le quarré de 64, qui a été fait à peu près de la même maniere que le quarré de 36; la somme de chaque rang & de chaque diagonale du quarré de 64, est de 260.

1	63	62	4	6	56	60	8
58	15	49	48	44	19	20	7
54	47	25	39	38	28	18	11
53	22	36	30	31	33	43	12
13	42	32	34	35	29	23	52
10	24	37	27	26	40	41	55
14	45	16	17	21	46	50	51
57	2	3	61	59	9	5	64

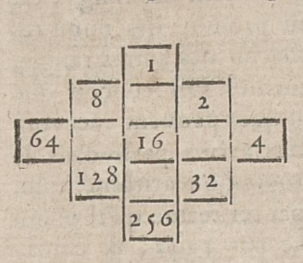
Des quarrés magiques pairs formés par des termes en progression géométrique.

AU lieu de la progression arithmétique, on peut prendre uue progression géométrique, par exemple, cette progression double 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, & alors il arrivera que neuf termes étant disposés magiquement, le produit qui viendra en multipliant ensemble ceux qui sont dans chaque rang, & dans chaque diagonale, sera 4096, qui est le cube du terme moyen 16.

8	256	2
4	16	64
128	1	32

Il n'y a point de regle pour les quarrés en progression géométrique, différente de celle que l'on

a enseigné pour les quarrés en progression arithmétique. Ainsi on connoîtra aisément que le quarré précédent est formé selon ce qui a été dit touchant les quarrés impairs, dont les termes sont en progression arithmétique. Il suffira d'en donner la figure, sans répéter le discours.



On peut encore former ce quarré impair, dont les termes seront les mêmes que ceux de cette progression géométrique 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, en suivant les mêmes regles.

		3		
	81		9	
2187		343		27
	6561		729	
		19683		

81	19683	9
27	343	2187
6561	3	729

Le produit des nombres de l'un des rangs, eſt 14348907 : il eſt égal au produit des nombres qui ſont contenus dans chacun des autres rangs, ou dans chacune des diagonales. On conçoit que ces ſortes de quarrés magiques peuvent recevoir toutes les variétés dont nous avons parlé dans le quarré magique de la progreſſion arithmétique. Car on peut commencer par tel terme qu'il plaira de la progreſſion, comme par 1243, & continuer juſqu'à ce qu'il y ait aſſez de termes pour remplir les caſes du quarré.

Voici un quarré impair, dont les termes commencent par 729.

19683	4782969	2187
6561	49049	531441
1594323	729	177147

Des quarrés magiques pairs, dont les termes ſont en progreſſion géométrique.

IL n'y a rien à dire de particulier ſur cette ſorte de quarré, on ſe contentera de repréſenter un quarré pair de 16 caſes; il ſera aiſé d'y appliquer toutes les regles & les obſervations qu'on a fait ſur ceux dont les termes ſont en progreſſion arithmétique. Ce quarré contient les 16 premiers termes de la progreſſion double 1, 2, 4, 8, &c. Le produit de chaque rang, ou de chaque diagonale en quelque ſens qu'on les prenne, eſt 1073741824, quarré de 32768. Ce quarré

peut recevoir 880 dispositions différentes, & donner le même produit. C'est une chose très-digne de remarque.

1			8
	32	64	
	512	1024	
4096			32768

1	16384	8192	8
2048	32	64	256
128	512	1024	16
4096	4	2	32768

Des quarrés magiques en proportion harmonique.

Nous ajouterons ici cet autre quarré de neuf cases, dont les nombres de chaque rang, de quelque maniere qu'on les prenne, c'est-à-dire, en long, en travers, ou en diagonale, sont en proportion harmonique. On peut trouver autant d'autres nombres qu'on voudra qui auront la même propriété, si au lieu des nombres précédens on met des lettres, comme vous voyez dans la table sui-

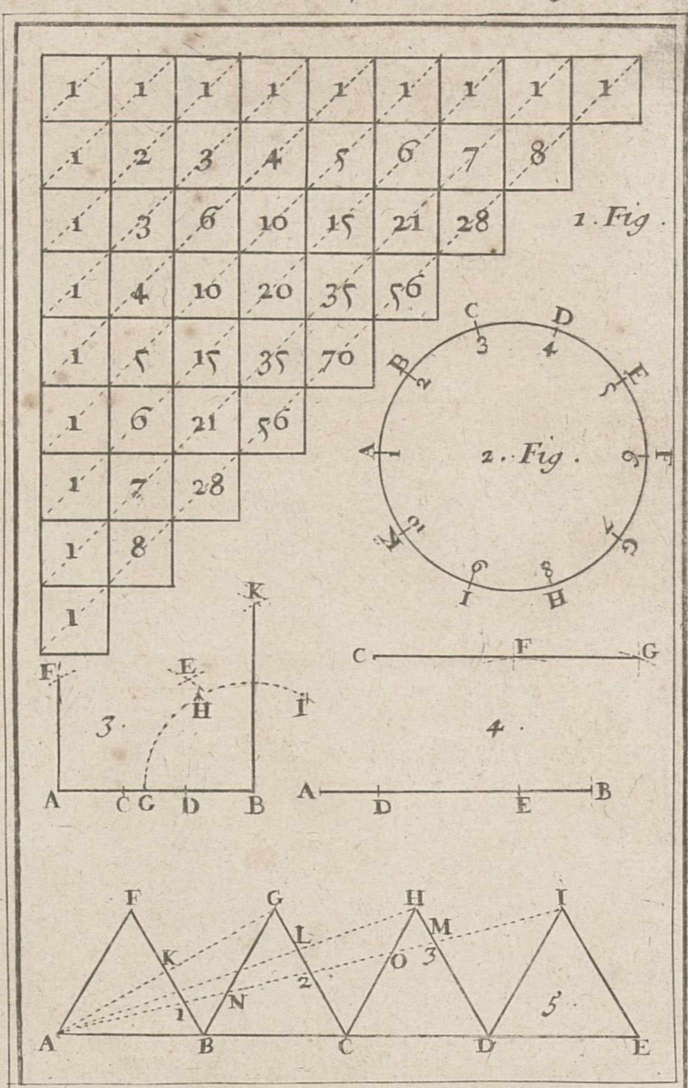
1260	840	630
504	420	360
315	280	252

vante, où les grandeurs littérales de chaque rang ſont harmoniquement proportionnelles. C'eſt pourquoi en donnant aux trois lettres indéterminées a, b, c, des valeurs différentes, on aura en la place de ces quantités littérales des nombres qui conſerveront dans chaque rang, la proportion harmonique.

a	$\frac{2ac}{a+c}$	c
$\frac{2ab}{a+b}$	$\frac{2bc}{b+c}$	$\frac{2abc}{2ab+ac-bc}$
b	$\frac{2abc}{2ac+ab-bc}$	$\frac{abc}{ab+ac-bc}$

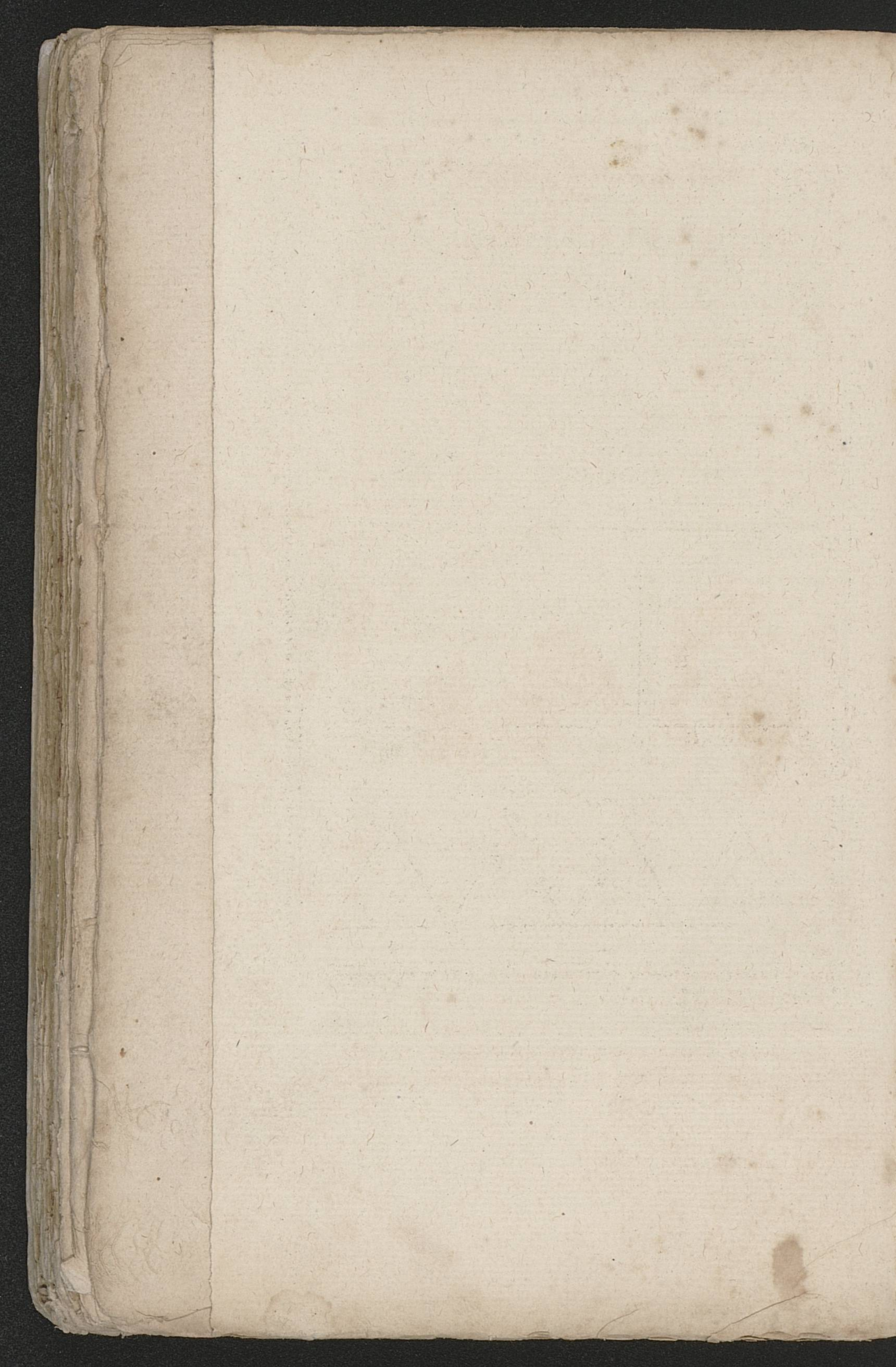
AVERTISSEMENT.

Ceux qui voudront être inſtruits plus à fond des quarrés magiques, pourront conſulter la géométrie de M. Arnaud, les élémens du P. Preſtet, & principalement ce qui en a été dit dans les ouvrages de Meſſieurs de l'académie royale des ſciences, imprimés en 1693.



Tome I. Planche 1.

N°



PROBLEME XIII.

Du triangle arithmétique.

ON appelle triangle arithmétique la moitié d'un quarré divisé en plusieurs petits quarrés égaux, qui contiennent les unités, les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, &c. qu'on a par l'addition continuelle des nombres précédens : les nombres pyramidaux 1, 4, 10, 20, &c. que donne l'addition continuelle des nombres triangulaires; les nombres pyramido-pyramidaux, 1, 5, 15, 35, &c. qui viennent par l'addition continuelle des nombres pyramidaux, & ainsi de suite, comme vous voyez dans la figure, qu'il suffit de regarder pour la comprendre.

Plan. 1, fig. 1.

On appellera diagonale, ou base du triangle arithmétique, les quarrés qui sont traversés par une ligne ponctuée.

Entre les différens usages du triangle arithmétique, je ne parlerai que de ceux qui servent aux combinaisons, aux permutations & autres parties du jeu, parce que les autres sont trop spéculatifs pour des récréations mathématiques.

Des combinaisons.

NOus entendons ici par combinaisons, tous les différens choix qu'on peut faire de plusieurs choses dont le nombre est connu, en les prenant en diverses manieres, une à une, deux à deux, trois à trois, &c. sans rien changer à l'ordre.

I.

Si l'on propoſe quatre choſes différentes, exprimées par ces quatre lettres *a*, *b*, *c*, *d*, toutes les diverſes manieres d'en prendre, par exemple, deux différentes, ſçavoir, *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *cd*, ou trois différentes, ſçavoir, *abc*, *abd*, *acd*, *bcd*, s'appellent combinaiſons. D'où il eſt aiſé de voir que quatre choſes propoſées peuvent être priſes une à une en quatre façons, deux à deux en ſix façons, trois à trois en quatre façons, & quatre à quatre en une maniere ſeulement. De ſorte que 1 ſe combine dans 4 quatre fois, 2, ſix fois, 3, quatre fois, & 4, une fois.

II.

Pour trouver dans un plus grand nombre de choſes différentes, par exemple, de ſept, les diverſes combinaiſons que l'on peut faire en les prenant diverſement, ſoit pour les ajouter enſemble, ou pour les multiplier, comme ſi l'on vouloit ſçavoir toutes les conjonctions poſſibles des ſept planetes, en les prenant deux à deux, c'eſt-à-dire, ſi l'on vouloit ſçavoir combien de fois 2 ſe combine dans 7, ajoutez l'unité à chacun des deux nombres donnés 2, 7, pour avoir ces deux autres nombres 3, 8, qui font connoître que dans la troiſieme caſe de bas en haut, ou de haut en bas, de la huitieme diagonale du triangle arithmétique, on trouvera le nombre des combinaiſons qu'on cherche, ſçavoir, 21, qui marque les diverſes rencontres des ſept planetes conjointes deux à deux. Et pour connoître la huitieme diagonale, & la troiſieme caſe de cette diagonale, comptez huit dans le premier rang horiſontal, marqué d'unités, en com-

mençant par la gauche, ou dans le premier rang perpendiculaire, marqué aussi d'unités en commençant par le haut, puis prenez la troisieme case en comptant par l'un ou l'autre de ces deux premiers rangs, & suivant la diagonale ponctuée.

Ou bien, parce que les deux nombres donnés sont 2, 7, & que le plus petit est 2, ajoutez ensemble tous les nombres du deuxieme rang jusqu'à la septieme diagonale, parce que le plus grand nombre donné est 7, sçavoir, 1, 2, 3, 4, 5, 6, & la somme 21 sera le nombre qu'on cherche.

III.

Si vous n'avez point de triangle arithmétique qui même peut manquer, lorsque le nombre des choses proposées passera 9, parce que nous ne l'avons pas prolongé au-delà, quoique cela soit facile, apprenez cette autre regle, qui est générale pour quelque nombre que ce soit.

Etant donné, par exemple, les deux nombres 2, 7, pour sçavoir combien de fois le plus petit 2 se combine dans le plus grand 7, faites des deux nombres donnés 2, 7, ces deux progressions arithmétiques 2, 1, & 7, 6, qui décroissent de l'unité, & qui ne doivent avoir que deux termes, sçavoir, autant que le plus petit nombre donné 2 comprend d'unités. Après cela multipliez ensemble les termes de chaque progression, sçavoir, 7 par 6, & 2 par 1. Divisez le premier produit 42 par le second 2, & le quotient 21 sera le nombre des combinaisons de 2 en 7.

C'est par cette maniere, ou par la précédente, qu'on trouvera que 3 se combine dans 7, 35 fois, & 4 aussi 35 fois, que 5 s'y combine 21 fois, & 6 seulement 7 fois.

D'où il suit que le nombre de toutes les combinaisons qui se peuvent faire dans sept choses différentes en les prenant une à une, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, six à six, sept à sept, est 127, que l'on trouve en ajoutant tous les nombres particuliers des combinaisons 7, 21, 35, 21, 7, 1, qui conviennent aux nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

IV.

Mais cette somme 127 se peut trouver plus facilement, en faisant cette progression géométrique double, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, qui doit être composée de sept termes, parce que le nombre composé des choses à combiner est 7. Car la somme 127 de tous ces termes sera le nombre qu'on cherche.

D'ou il suit que pour avoir toutes les combinaisons de plusieurs choses proposées, il faut mettre autant de termes de la progression double 1, 2, 4, &c. qu'il y a de choses proposées, & faire une somme de tous les termes; * cette somme donnera les differentes manieres dont ces choses peuvent être combinées, en les prenant une à une, deux à deux, trois à trois, &c. Si on a proposé quatre choses différentes, il faut se servir des quatre premiers termes de la progression double, 1, 2, 4, 8, dont la somme * 15 montre que quatre choses peuvent être combinées en quinze manieres, en les prennant une à une, deux à deux, &c. S'il y a cinq choses proposées, il faut employer les cinq premiers termes de la progression double, 1, 2, 4, 8, 16, dont la somme * 31, fait connoître qu'on peut combiner cinq choses en trente-une manieres. Ainsi des autres.

* Prob. XI, p. 68.

REMARQUE.

Au lieu de prendre la ſomme des termes, on peut prendre le terme qui ſuit immédiatement le dernier terme donné, & le diminuer de l'unité ; le reſte ſera le nombre qui exprimera en combien de manieres on pourra combiner les choſes données. Ainſi dans le premier exemple de cet article IV, le terme qui ſuit 64 eſt 128, qu'il faut diminuer de l'unité; ce reſte 127 eſt le nombre cherché. De même dans le ſecond exemple, le terme qui ſuit 16 eſt 32, qui diminué de l'unité donne 31 pour le nombre demandé.

V.

On peut encore trouver cette ſomme 127 plus facilement en cette ſorte. Otez l'unité du nombre propoſé 7, le reſte 6 fait voir qu'il faut prendre la ſixieme puiſſance de 2, qui eſt 64, dont le double 128 étant diminué de l'unité, donnera 127 pour le nombre cherché.

VI.

J'ajouterai ici deux méthodes particulieres aux deux nombres 2 & 3, pour trouver combien de fois ils ſe combinent dans un nombre propoſé qui doit être plus grand, par exemple, dans le même nombre donné 7.

Premierement, pour trouver combien de fois 2 ſe combinent dans 7, ôtez ce nombre 7 de ſon quarré 49, & 21, moitié du reſte 42, ſera le nombre des fois que 2 ſe combine dans 7.

Pour trouver combien de fois 3 ſe combine dans 7, ajoutez au cube 343 du nombre donné 7 le double 14 de ce même nombre 7, & ôtez de

la ſomme 357, le triple 147 du quarré 49 du même nombre 7; & 35, ſixieme partie du reſte 210, ſera le nombre des fois que 3 ſe combine dans 7.

VII.

Si on propoſoit de combiner quatre choſes, dont il y eût deux égales & deux différentes, exprimées par ces quatre lettres, *a*, *a*, *b*, *c*, on voit bien qu'on les peut prendre une à une en trois façons, *a*, *b*, *c*, deux à deux en quatre façons, *aa*, *ab*, *ac*, *bc*, trois à trois en trois façons, *aab*; *aac*, *abc*, & quatre à quatre en une ſeule façon, *aabc*; ce qui fait qu'on les peut combiner en tout de 11 manieres différentes. Si on propoſoit cinq choſes, dont il y eût trois égales & deux différentes exprimées par ces lettres, *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, on peut les prendre une à une en deux manieres, *a*, *b*, deux à deux en trois manieres, *aa*, *ab*, *bb*, trois à trois en trois manieres, *aaa*, *aab*, *abb*, quatre à quatre en deux manieres *aaab*, *aabb*, & cinq à cinq en une ſeule maniere ſeulement, ce qui fait en tout 11 combinaiſons.

VIII.

Si on veut ſçavoir en combien de manieres ſe peuvent combiner quatre choſes, comme *a*, *a*, *b*, *c*, dont deux ſont les mêmes, & les deux autres ſont différentes, voici ce qu'il faut faire; *a* étant deux fois parmi les choſes données, on prendra ce nombre 2 qu'on gardera à part; on ajoutera l'unité à ce 2, & l'on aura 3, qui ſera multiplié par le nombre des *b*, qui n'eſt ici qu'une fois parmi les choſes données: ainſi l'on aura encore 3 qu'on conſervera; on ajoutera ce 3 avec le 2 déja trouvé, on augmentera la ſomme 5 de l'unité, & l'on

aura *6* qui ſera multiplié par le nombre des *c*, qui n'eſt ici qu'une fois : ainſi l'on aura *6*, que l'on ajoutera aux nombres conſervés 2, 3, la ſomme 11 montre qu'on peut combiner en onze manieres différentes ces quatre choſes, *a*, *a*, *b*, *c*.

De même ſi on avoit propoſé ces huit choſes, *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *c*, *c*, *c*, à cauſe que *a* eſt trois fois, on aura 3, que l'on conſervera; on ajoutera 1 à 3, la ſomme 4 ſera multipliée par 2, nombre des *b*, le produit 8 ſera conſervé; on ajoutera enſemble 3, 8, & la ſomme 11 ſera augmentée de l'unité; ce qui donnera 12, qu'on multipliera par 3, nombre des *c*. Le produit 36 ſera ajouté aux nombres conſervés 3, 8, la ſomme 47 montre que ces huit choſes propoſées peuvent être combinées en 47 manieres.

Mais les choſes données étant toutes égales, *a*, *a*, *a*, *a*, le nombre 4 des choſes données fait voir qu'on ne les peut prendre qu'en quatre manieres différentes, ſçavoir, *a*, *aa*, *aaa*, *aaaa*.

IX.

On a vu dans les premiers articles que quatre choſes différentes, *a*, *b*, *c*, *d*, pouvoient être combinées en 15 manieres; on veut ſçavoir s'il n'y a point un autre nombre des choſes égales ou différentes qui puiſſent être combinées auſſi en quinze manieres. Ajoutez 1 à 15; vous aurez 16.

Premierement, ayant diviſé 16 par 4, il vient 4, qui étant diviſé par 2 donnera 2; ayant diviſé ce 2 par 2, il vient 1, qui ne peut plus être diviſé & qu'on néglige. Prenez les trois diviſeurs 4, 2, 2, ôtez de chacun l'unité, il reſtera 3, 1, 1, leſquels ajoutés font 5. Cette ſomme 5, & ces trois reſtes 3, 1, 1, montrent qu'on peut com-

biner en 15 manieres différentes, 5 choſes, dont trois ſont égales, une différente, & une autre encore différente, comme, *a*, *a*, *a*, *b*, *c*.

Secondement, après la premiere diviſion de 16 par 4, on diviſera le quotient 4 par 4, & il vient au quotient 1, qui ne pouvant plus être diviſé, ſera négligé. On prendra les deux diviſeurs 4, 4, de chacun deſquels ayant ôté l'unité, il viendra 3, 3, on ajoutera ces deux reſtes, & l'on aura 6. La ſomme 6 & les deux reſtes 3, 3, font voir qu'on peut combiner en 15 manieres ſix choſes, dont trois ſont égales, & trois autres ſont encore égales, telles que ſont, *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *b*.

Troiſiemement, on diviſera 16 par 8, il viendra 2; ce quotient 2 diviſé encore par 2, donnera 1, qui ſera négligé. De chacun de ces diviſeurs 8, 2, on ôtera l'unité; on ajoutera les reſtes 7, 1 enſemble, la ſomme 8 & les reſtes 7, 1, montrent qu'on peut combiner en 15 manieres différentes huit choſes, dont 7 ſeront égales, & une ſera différente, comme *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *b*.

Quatriemement, on diviſera 16 par 16, le quotient eſt 1 qu'on négligera. Le ſeul diviſeur eſt 16, dont on ôtera l'unité; le reſte 15 fait connoître qu'on peut combiner en quinze façons quinze choſes égales, exprimées par ces caracteres, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*.

Enfin ſi on diviſe 16 par 2, & ſon quotient 8 encore par 2, puis 4 par 2, & ce 2 par 2, on trouvera que quatre choſes différentes peuvent être combinées en quinze manieres différentes, parce qu'il reſtera quatre unités, après avoir ôté l'unité des quatre diviſeurs, 2, 2, 2, 2.

REMARQUE.

On voit par cet article IX, qu'on peut prendre tel diviſeur qu'on voudra, & les changer dans la ſuite de la diviſion, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à l'unité. On pourra examiner combien de choſes peuvent être combinées un certain nombre de fois, comme 11 fois, 22 fois, &c. il faut toujours ajouter 1 au nombre propoſé, comme ſi on propoſe 11, j'ajoute l'unité & je diviſe 12 ou par 6, ou par 4, ou par 3, ou par lui-même.

Pour donner plus de facilité à diſtinguer ces diviſeurs, on décrira d'abord le nombre propoſé, augmenté de l'unité, & au-deſſous on écrira ſon diviſeur, le quotient s'écrira à côté du nombre propoſé dans une colonne ſéparée : le même diviſeur ou un autre, s'écrira au-deſſous de ce quotient, & le ſecond quotient à côté du premier dans une troiſieme colonne ; le troiſieme diviſeur s'écrira au-deſſous de ce dernier quotient, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à l'unité, comme on le voit dans ces tables.

Nombre propoſé augmenté de l'unité.	12.	6	3	1 Quotiens.
Premier diviſeur	2	2	3	Diviſeurs.
	1	1	2	Diviſeurs diminués de l'unité.

Même nomb. prop. augmenté de l'unité.	12	3	1	Quotiens.
Premier diviſeur.	4	3		Diviſeurs.
	3	2		Diviſeurs diminués de l'unité.

Même nomb. prop. augmenté de l'unité.	12.	2	1	Quotiens.
Premier diviſeur.	6.	2		Diviſeurs.
	5	1		Diviſeurs diminués de l'unité.

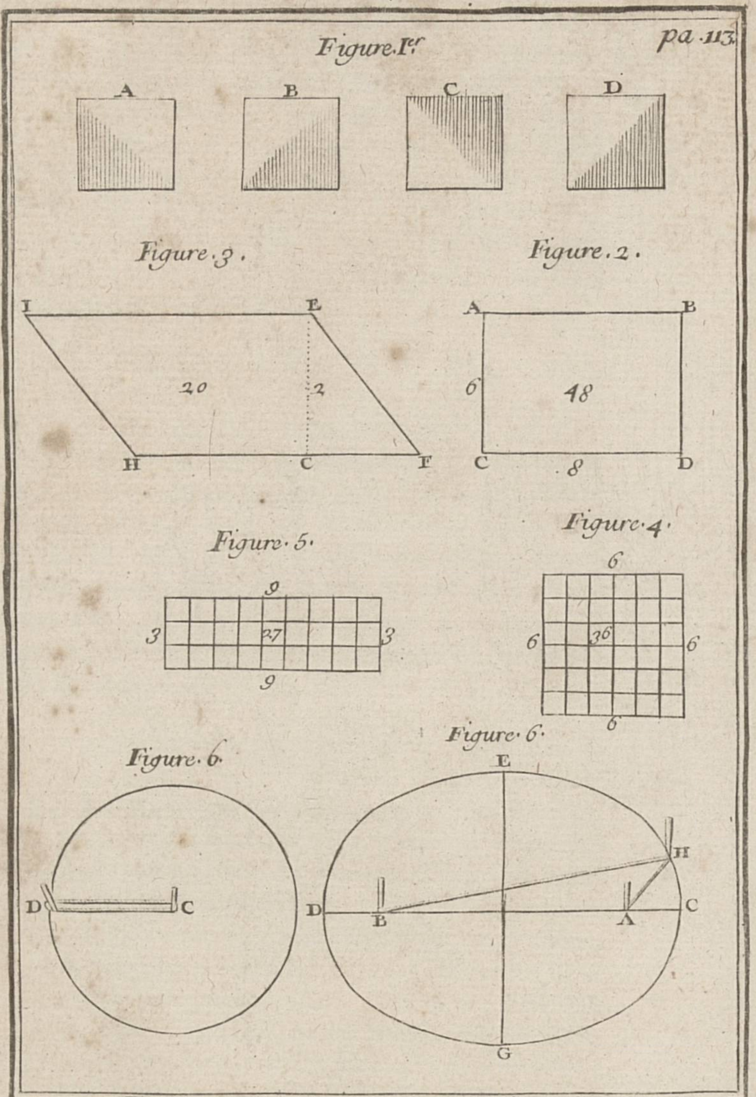
Autre nomb. prop. augmenté de l'unité.	23	1	Quotiens.
Premier diviſeur.	23		Diviſeur unique.
	22		Diviſeur diminué de l'unité.

Ce dernier diviſeur 22 marque qu'il n'y a que 22 choſes égales qui puiſſent être combinées en 22 manieres différentes, puiſque le nombre 23 eſt un nombre premier.

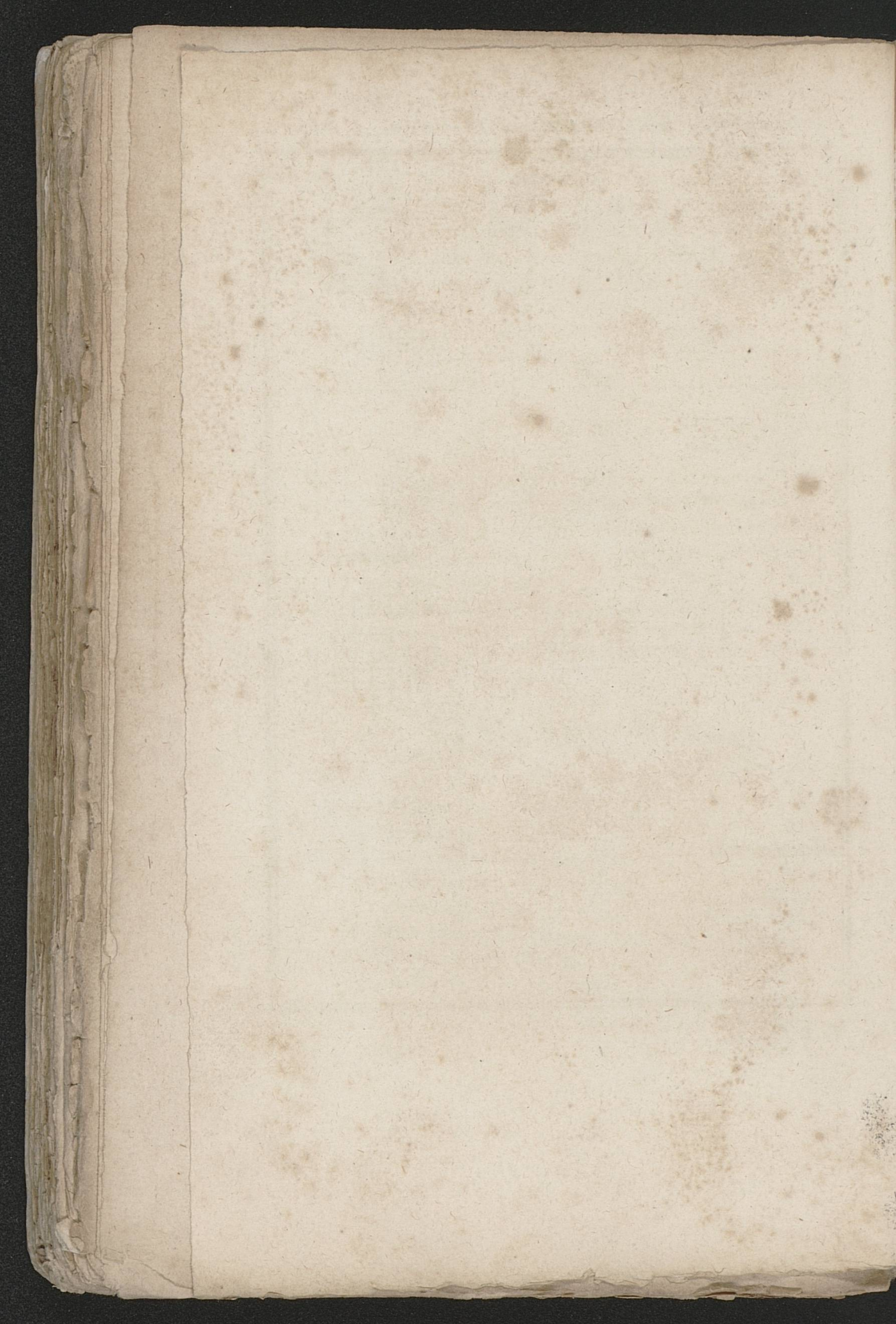
On peut conſulter ce qu'on a dit des moyens de trouver toutes les parties aliquotes de quelque nombre donné. Ce ſera un éclairciſſement pour ce qu'on dit ici.

QUESTION I.

UN quarreau mi-parti de deux couleurs par la diagonale, peut recevoir quatre poſitions différentes. Car l'angle coloré peut être en bas ou en haut, mais à main gauche : ce même angle peut être encore en haut & en bas, mais à main droite. Au lieu d'un quarreau, on peut donc prendre quatre quarreaux, & les regarder dans ces quatre ſituations différentes. Je nommerai ces quatre quarreaux A, B, C, D. La regle des combinaiſons rapportée


pa. 113.
Figure. Ire.
A
B
C
D
Figure. 3.
Figure. 2.
I
E
20
2
H
C
F
A
B
6
48
C
8
D
Figure. 5.
Figure. 4.
9
3
27
3
9
6
6
36
6
6
Figure. 6.
Figure. 6.
D
C
E
H
D
B
A
C
G

N°



rapporté ci-dessus, art. IV, fait connoître que ces quatre quarreaux peuvent être combinés en 15 manieres différentes. Car si on les prend un à un, l'on aura A, B, C, D; deux à deux, on aura AB, AC, AD, BC, BD, CD; trois à trois, on aura ABC, ABD, ACD, BCD; & quatre à quatre, on aura seulement ABCD. Ceci n'est qu'une application des regles qu'on a données dans les cinq premiers articles précédens.

Plan. 2, fig. 1.

QUESTION II.

ON propose de combiner quatre de ces mêmes quarreaux, dont deux A, A, sont égaux & les deux autres sont B & C. Suivant l'article VIII, on aura A, B, C, en les prenant un à un; AA, AB, AC, BC, en les prenant deux à deux; AAB, AAC, ABC, en les prenant trois à trois; & AABC, en les prenant quatre à quatre; ce qui donne onze manieres différentes de combiner les quarreaux A, A, B, C.

Des permutations.

IL y a une autre sorte de changemens, que l'on peut appeller *permutations*, où l'on prend les mêmes choses deux fois, comme si l'on veut combiner ces trois nombres 2, 5, 6, en les prenant deux à deux, pour sçavoir les différentes valeurs qu'ils peuvent produire. En considérant les deux premiers nombres en cette sorte, 25, on dira qu'ils font vingt-cinq, & en les considérant ainsi, 52, on prononcera qu'ils font 52. De même en considérant le premier & le troisieme nombre en cette sorte 26, on connoîtra qu'ils font vingt-six,

& en les considérant ainsi, 62, on dira qu'ils sont soixante-deux; ainsi des autres : où vous voyez que le nombre des permutations est double de celui des combinaisons.

On se sert des permutations, quand on veut faire des anagrammes, où l'on fait quelquefois des rencontres heureuses, c'est-à-dire, qui conviennent à leur sujet.

On se sert aussi des permutations dans le jeu de dez, pour connoître le nombre des hasards qu'auroit celui qui, avec deux dez, entreprendroit de faire, par exemple, 9. Il est certain qu'il auroit quatre hasards, parce que 9 se peut faire en quatre façons, sçavoir, par le 4 du premier dez & le 5 du second, ou bien par le 5 du premier & le 4 du second, & encore par le 3 du premier dez & le 6 du second, ou bien par le 6 du premier & le 3 du second.

I.

Plan. 1, fig. 1.

Pour trouver avec le triangle arithmétique le nombre des permutations de plusieurs choses, on regardera le second rang perpendiculaire de ce triangle, comme étant le premier; on cherchera dans ce second rang le nombre des choses proposées; on ne fera attention qu'à la base dans laquelle il se trouvera. On multipliera ce nombre trouvé par l'unité; celui de la case suivante, qui sera regardé comme le deuxieme, par 2; celui de la troisieme case, par 3 fois 2, ou 6; celui de la quatrieme case par 4 fois 6, ou 24; celui de la cinquieme case par 5 fois 24, ou 120; celui de la sixieme case par 6 fois 120, ou 720, & ainsi de suite, en multipliant toujours le nombre de la

case par le produit précédent. Le produit de chaque case de la base selon leur ordre, sera le nombre des permutations des choses proposées prises une à une, deux à deux, trois à trois, &c. Mais quand on sera parvenu à l'unité du premier rang parallele, on répétera le dernier nombre, qui sera aussi le nombre des permutations des choses prises selon le nombre qu'on les aura proposées. Un exemple éclaircira cette regle.

Plan. I, fig. I.

Supposant qu'on ait proposé quatre choses, *a b*, *c*, *d*, pour sçavoir quel est le nombre de leurs permutations, on cherchera dans le second rang perpendiculaire le nombre 4, qui se trouve dans la base du cinquieme triangle. Ce nombre 4, multiplié par l'unité, est le nombre des permutations de ces quatre choses prises une à une. On multipliera ensuite le nombre 6 de la case suivante, qui est regardée comme la deuxieme dans la même base, par 2, le produit 12 sera le nombre des permutations des choses proposées, prises deux à deux; puis on multipliera le nombre 4 de la troisieme case de la même base par trois fois 2 ou 6, le produit 24 est le nombre des permutations des choses proposées, prises trois à trois : enfin comme on est parvenu à l'unité, qui est dans le premier rang parallele, & qui est commune à la base du cinquieme triangle, on répétera le même produit qu'on vient de trouver, sçavoir, 24 qui sera aussi le nombre des permutations des choses prises quatre à quatre.

Si l'on veut sçavoir le nombre de toutes ces permutations, on ajoutera les produits trouvés 4, 12, 24, 24; leur somme 64 est le nombre de toutes ces permutations: c'est-à-dire, que quatre choses différentes peuvent recevoir 64 change-

mens différens, ſans être priſes deux fois dans aucune de ces permutations.

II.

Il n'eſt point néceſſaire de ſe ſervir du triangle arithmétique, pour trouver toutes les permutations, ou les tranſpoſitions poſſibles de pluſieurs choſes, par exemple, de ces quatre lettres, AMOR, priſes quatre à quatre; on fera cette progreſſion arithmétique 1, 2, 3, 4, compoſée d'autant de termes qu'il y a de lettres propoſées, en ſorte que le premier terme ſoit toujours l'unité, & que le dernier exprime le nombre des lettres : & alors en multipliant enſemble tous ces termes, le produit

AMOR	MARO	OAMR	ROMA
AMRO	MAOR	OARM	ROAM
AOMR	MOAR	OMAR	RMAO
AORM	MORA	OMRA	RMOA
ARMO	MRAO	ORAM	RAMO
AROM	MROA	ORMA	RAOM

24 ſera le nombre pes permutations, ou changemens différens que l'on peut faire des quatre lettres propoſées AMOR, comme vous voyez ici.

III.

C'eſt de la même façon que l'on trouvera le nombre des permutations d'une autre multitude de lettres, ſçavoir, en faiſant une progreſſion d'autant de nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5, &c. qu'il y aura de lettres à combiner enſemble, & en multipliant enſemble tous les termes de cette progreſſion. Ainſi vous trouverez que cinq lettres ſe peuvent combi-

ner ſimplement, ou tranſpoſer en 120 manieres, ſix en 720, & ainſi des autres, comme vous voyez dans la table ſuivante, qui montre que les 23 lettres de l'alphabeth ſe peuvent combiner en 25852016738884976640000 façons.

1	1. A.
2	2. B.
3	6. C.
4	24. D.
5	120. E.
6	720. F.
7	5040. G.
8	40320. H.
9	362880. I.
10	3628800. K.
11	39916800. L.
12	479001600. M.
13	6227020800. N.
14	87178291200. O.
15	1307674368000. P.
16	20922789888000. Q.
17	355687428096000. R.
18	6402373705728000. S.
19	121645100408832000. T.
20	2432902008176640000. V.
21	51090942171709440000. X.
22	1124000727777607680000. Y.
23	25852016738884976640000. Z.
24	620448401733239439360000.
25	15511210043330985984000000.

Cette table eſt aiſée à conſtruire; car ayant connu, par exemple, que 4 lettres ſe peuvent combiner ou tranſpoſer en 24 façons, ſi l'on multiplie

ce nombre 24 des permutations par le nombre 5, qui suit immédiatement après le 4, on aura 120 pour le nombre des permutations de 5 lettres, lequel étant multiplié par le nombre suivant 6, on aura 720 pour le nombre des permutations de 6 lettres, lequel étant multiplié par le nombre suivant 7, le produit 5040 sera le nombre des permutations de 7 lettres, & ainsi de suite.

QUESTION I.

D'Où il suit que si on veut sçavoir en combien de manieres différentes sept personnes peuvent se ranger à table, il n'y a qu'à multiplier les premiers nombres naturels jusqu'à sept de cette sorte, 1 fois 2 fois 3 fois 4 fois 5 fois 6 fois 7. Le produit 5040 fait voir que sept personnes peuvent être rangées à une table en 5040 manieres différentes.

QUESTION II.

APrès avoir fait attention à ce que l'on vient de dire, on n'aura point de peine à croire que huit enfans de chœur puissent tellement changer de place au chœur trois fois par jour, à matines, à la messe & à vêpres, qu'ils seroient environ 37 ans à achever ces changemens différens. Il est vrai que c'est une chose surprenante, mais il est constant que huit choses peuvent recevoir quarante mille trois cens vingt changemens; & comme il s'en feroit trois par jour, si on divise 40320 par 3, on aura 13440 jours, qui font près de 37 ans, pendant lesquels il faudroit faire chaque jour trois changemens.

QUESTION III.

ON connoîtra par le même moyen que les huit mots de ce vers fait à l'honneur de la Sainte Vierge, peuvent recevoir les mêmes chan-

Tot tibi ſunt dotes, Virgo, quot ſidera cœlo.

gemens, étant pris huit à huit, ſi on ne ſe ſoucie pas d'obſerver la meſure du vers : mais ſi on veut garder la meſure du vers hexametre, au lieu de 40320 permutations, ils n'en recevront que 3276. C'eſt-à-dire, que les mots de ces vers pourront avoir 3276 ſituations, & conſerver dans chacune de ces ſituations la meſure du vers hexametre.

QUESTION IV.

LEs douze apôtres ayant diſputé qui d'entr'eux ſeroit le premier, Jeſus-Chriſt leur déclara que celui qui voudroit être le premier ſeroit le dernier, & que le dernier deviendroit le premier. Suppoſons qu'après cette leçon d'humilité, chacun voulût céder la premiere place, la ſeconde & la troiſieme place à ſon compagnon, & qu'ainſi ils euſſent réſolu de ne demeurer jamais enſemble dans une même diſpoſition, on demande en combien de manieres ils auroient pu changer de place, en ſorte qu'ils ne ſe fuſſent jamais rencontrés les uns à l'égard des autres dans la même ſituation. *Réponſe*. Ils auroient pu changer en quatre cens ſoixante-dix-neuf millions mille ſix cens manieres différentes.

Si l'on ſuppoſe que les onze apôtres euſſent toujours obſervé de laiſſer la premiere place à ſaint Pierre, ils auroient pu changer de place en

trente-neuf millions neuf cens seize mille huit cens manieres différentes.

QUESTION V.

MAis ce qui paroîtra encore bien plus surprenant, c'est le calcul énorme qu'on va faire pour les différens changemens qui arriveroient à 24 noms qui ne rempliroient que deux lignes, supposant qu'on pût écrire 1440 lignes en chaque feuille de papier, ou bien 720 fois ces 24 noms, & que chaque rame de papier fût tellement battue qu'elle n'eût qu'un pouce d'épaisseur, je dis qu'il faudroit beaucoup plus de rames de papier pour écrire tous les changemens de ces 24 noms qu'il n'en pourroit contenir depuis le centre de la terre jusqu'au firmament, en les mettant les unes sur les autres. Car supposant qu'il y a 28,862, 640,000,000 de pouces, du centre de la terre aux étoiles il faudroit 1,751,245,560,364,553, 942 rames de papier & plus, pour écrire les 620448401733239439360000 changemens que peuvent recevoir ces 24 noms, parce que chaque rames de papier contenant 500 feuilles, & chaque feuille 720 changemens, chaque rame de papier contiendroit 360000 de ces changemens. Or divisant les 24 nombres 620, &c. par celui que contiendroit chaque rame, il vient 1,751, &c. qui est un nombre de pouces plus grand que celui qu'il y a depuis le centre de la terre jusqu'au firmament.

On voit aisément qu'il est impossible d'écrire toutes les permutations de ces 24 noms : car tous les princes du monde ne pourroient payer le papier, quand la rame ne coûteroit que 20 sols, & cent

mille ſcribes ſeroient 336,047,223,141 ans à écrire toutes les permutations de ces 24 noms, quand ils écriroient chacun une rame par ſemaine & travailleroient nuit & jour; en ſorte que chaque perſonne remplît 71 feuilles par jour, qui ſeroient cinq millions deux cens milles rames par an. Suppoſons encore qu'on voulût donner à chacun de ces ſcribes deux cens livres par an, ce ſeroit vingt millions par an, outre les cinq millions deux cens mille livres pour le papier. Comme il faudroit continuer cette dépenſe pendant 336,047,223,141 ans, elle ſe monteroit à la ſomme de ſix cens nonante-ſix quintillons, ſix cens ſept quadrillons, ſix cens vingt trillons, deux cens trente-un billons, cinq cens trente deux millions de livres.

L'imagination ſe perd dans ces ſortes de ſupputations, qui cependant ſont très-vraies, puiſqu'elles ſont fondées ſur les principes certains de l'arithmétique.

QUESTION VI.

Plan. 2, fig. 1.

ON veut ſçavoir combien de permutations peuvent recevoir les quatre quarreaux A, B, C, D, mi-partis de deux couleurs par la diagonale, pris un à un, deux à deux, trois à trois, & quatre à quatre. Pour y procéder avec ordre on cherchera toutes les combinaiſons de ces quatre quarreaux, qu'on a trouvé être A, B, C, D, pris un à un; AB, AC, AD, BC, BD, CD, pris deux à deux; ABC, ABD, ACD, BCD, pris trois a trois, & ABCD, pris quatre à quatre. Il faut enſuite chercher combien peuvent recevoir de permutations ces quarreaux ſuivant les quatre différentes combinaiſons qu'on vient de voir.

Plan. 2, fig. 1. Les quatre premieres combinaiſons des quarreaux A, B, C, D, pris un à un, ne donnent point d'autres permutations; les ſix combinaiſons ſuivantes des quarreaux AB, AC, &c. pris deux à deux, en donnent chacune deux; art. III & queſt. I, ce qui fait 12 permutations. Les quatre combinaiſons des quarreaux ABC, &c. pris trois à trois, donnent chacune ſix permutations, art. III, ce qui fait 24 permutations. Enfin la ſeule combinaiſon des quarreaux ABCD, pris quatre à quatre, donne encore 24 permutations, art. III. Si l'on ajoute toutes ces permutations 4, 12, 24, 24, elles feront la ſomme de 64. C'eſt-à dire, que quatre quarreaux ABCD, pris un à un, deux à deux, trois à trois, & quatre à quatre, peuvent êtres changés en ſoixante-quatre manieres différentes.

QUESTION VII.

SI on veut que ces quarreaux ſoient pris deux à deux, & que chacun ſoit répété, il eſt aiſé de connoître qu'il y aura ſeize permutations. Car par l'article II ou III des combinaiſons, on trouve que 2 en quatre peut être combiné ſix fois; & par l'article II, & queſtion I, des permutations, on ſçait que 2 choſes ne peuvent recevoir que 2 changemens; ainſi ces ſix combinaiſons donneront 12 permutations, auſquels ſi l'on joint les quatre AA, BB, CC, DD, de chaque quarreau répété, on aura 16 permutations.

REMARQUE.

Ce que l'on vient de dire des combinaiſons jointes aux permutations, fait entrevoir que qua-

tre quarreaux peuvent fournir des compartimens & des desseins à l'infini. C'est ce qu'a heureusement exécuté le pere Douat dans un traité très-curieux qu'il vient de faire paroître * sur un mémoire que le pere Sebastien Truchet présenta à l'académie royale des sciences en 1704. On y verra que ces quatre quarreaux pris quatre à quatre, répétés & permutés, forment 256 figures différentes. On verra avec étonnement qu'en prenant ces 256 figures deux à deux, trois à trois, & ainsi de suite jusqu'à 256, on peut trouver un nombre prodigieux de compartimens, dont les desseins seront tous différens. On pourra s'exercer soi-même en faisant des quarreaux de cartons mi-partis de deux couleurs par la diagonale, & les disposant en toutes les façons qu'on imaginera.

* en 1722.

Cet ouvrage n'est pas seulement curieux, il est encore très-utile, particulierement aux architectes, qui y trouveront une source intarissable pour le carrelage.

Des partis du jeu.

ON appelle *parti* en matiere du jeu, la juste distinction, ou le réglement de ce qui doit appartenir à plusieurs joueurs de l'argent qui est au jeu, & qu'ils jouent en un certain nombre de parties proportionnellement à ce que chacun a droit d'espérer de la fortune par le nombre des parties qui lui manquent pour achever.

On suppose que deux joueurs ont mis chacun 40 pistoles au jeu. Dans ce cas cet argent ne leur appartient plus, parce qu'en le mettant au jeu ils en ont quitté la propriété. Mais en revanche ils ont le droit d'attendre ce que le hasard peut leur

en donner, ſuivant les conditions dont ils ſont convenus avant que de jouer. On ſuppoſe encore qu'ils jouent 80 piſtoles en trois parties, que le premier ait une partie, & que le ſecond n'en ait point, c'eſt-à-dire, qu'il manque deux parties au premier pour gagner, & trois au ſecond. Enfin ſi les joueurs veulent ſe ſéparer en renonçant à l'attente du haſard, pour rentrer chacun dans la propriété de quelque choſe, le premier à raiſon des deux parties qui lui manquent, & le ſecond à raiſon des 3 parties qu'il lui faut pour gagner tout l'argent; on demande quelle eſt la portion que chacun des joueurs doit retirer de l'argent qu'ils ont mis au jeu. On peut trouver cette portion, ou ce parti, par le moyen du triangle arithmétique, en cette ſorte.

Parce que nous avons ſuppoſé qu'il manque au premier joueur 2 parties, & trois au ſecond pour gagner, & que la ſomme des deux nombres 2 & 3 eſt 5, il faut prendre dans la cinquieme diagonale du triangle arithmétique, la ſomme 5 des deux premiers nombres 1, 4, à cauſe des deux parties qui manquent au premier joueur, & la ſomme 11 des 3 autres 6, 4, 1, à cauſe des trois parties qui manquent au ſecond joueur, & ces deux dernieres ſommes 5, 11, donneront la raiſon réciproque des deux partis qu'on cherche; de ſorte que le parti de celui à qui il ne manque que 2 parties eſt au parti de celui à qui il en manque 3, comme 11 eſt à 5.

Plan. 1, fig. 1.

Mais pour déterminer ces deux partis, c'eſt-à-dire, pour aſſigner à chacun la part des 80 piſtoles qui ſont au jeu, à raiſon des avantages qu'il a, il faut diviſer ce nombre 80 en deux parties proportionnelles aux deux termes 11, 5; ce qui ſe fera en

multipliant séparément par ces deux termes 11, 5, le nombre 80 des pistoles qui sont au jeu, & divisant chacun des deux produits 880, 400, par la somme 16 des deux mêmes termes 11, 5, on aura 55 pour le nombre des pistoles que doit emporter le premier joueur qui a une partie, & 25 pour le nombre des pistoles que doit prendre le second joueur qui n'a point de partie.

Pareillement s'il manque 1 partie au premier joueur, & 2 au second pour gagner, on ajoutera ensemble ces deux nombres de parties 1, 2, & parce que leur somme est 3, on prendra dans la troisieme diagonale du triangle arithmétique, le seul & premier nombre 1, & la somme 3 des deux autres 2, 1 : ces deux nombres 1, 3, font connoître que le parti du premier joueur est au parti du second, comme 3 à 1. Et parce que la somme de ces deux termes 1, 3, est 4, il s'ensuit que le premier joueur doit avoir les $\frac{3}{4}$ des 80 pistoles qui sont au jeu, & le second seulement $\frac{1}{4}$. Par conséquent il appartient 60 pistoles au premier joueur, & 20 au second, dans la supposition que nous avons faite qu'ils veulent se séparer sans continuer le jeu.

Par-là vous voyez que si le jeu est dans cet état, qu'il manque au premier joueur une partie, & au second deux parties pour achever, le premier joueur pourroit parier au pair 3 contre 1.

On peut résoudre ces sortes de questions sans le secours du triangle arithmétique, en cette sorte.

1 Cas.

Puisqu'il manque au premier joueur une partie pour achever, & qu'il en manque deux au second, on considérera que si les joueurs continuoient de

jouer, & que le second gagnât une partie, il lui manqueroit comme au premier une partie pour achever, & que dans ce cas les deux joueurs ayant des hasards égaux, leurs partis seroient aussi égaux, par cette regle générale, qui porte que le parti du premier joueur est au parti du second, en même raison que le nombre des hasards qui peuvent faire gagner le premier, au nombre des hasards qui peuvent faire gagner le second. Ainsi dans cette supposition le parti de chacun seroit la moitié de l'argent qui est au jeu.

Il est donc certain que si le premier gagne la partie qui se va jouer, tout l'argent qui est au jeu lui appartiendra, & que s'il la perd, il ne lui en appartiendra que la moitié. C'est pourquoi, s'ils veulent se séparer sans jouer cette partie, le premier doit avoir la moitié de l'argent qui est au jeu, & encore la moitié de la moitié du même argent, c'est-à-dire, qu'il doit avoir les $\frac{3}{4}$ de cet argent. Le reste $\frac{1}{4}$ appartiendra au second. Car il est évident que si un joueur prétend une certaine somme en cas de gain, & une somme moindre en cas de perte, le sort étant égal, son parti est que sans jouer, il lui appartient la moitié de ces deux sommes prises ensemble.

2. *Cas.* Ce premier cas servira à résoudre le suivant, qui suppose qu'il manque au premier joueur une partie pour achever, & au second trois parties. Car si le premier gagne une partie, il doit emporter les 80 pistoles qui sont au jeu, & s'il perd une partie, en sorte qu'il n'en faille plus que deux au second pour achever, il appartiendra au premier les $\frac{3}{4}$ de l'argent, *par le premier cas.* Ainsi

en cas de gain, le premier emportera tout l'argent ; & en cas de perte, il ne lui en appartiendra que les $\frac{3}{4}$. C'eſt pourquoi en cas de parti, il ne lui en doit appartenir que la moitié de ces deux ſommes priſes enſemble, c'eſt-à-dire $\frac{7}{8}$, ou 70 piſtoles. Le reſte $\frac{1}{8}$, ou 10 piſtoles appartiendront au ſecond.

3. Cas. Ce ſecond cas ſervira de la même façon à réſoudre le ſuivant, qui ſuppoſe qu'il manque deux parties au premier joueur pour achever, & trois au ſecond. Car ſi le premier gagne une partie, il doit avoir les $\frac{7}{8}$ de l'argent qui eſt au jeu, par le 2 *cas* ; & s'il perd une partie, en ſorte qu'il n'en faille plus que deux au ſecond pour gagner, ſçavoir, autant qu'il en manque au premier, chacun doit avoir pour ſon parti la moitié de l'argent qui eſt au jeu. C'eſt pourquoi en cas de gain, le premier emportera $\frac{7}{8}$ de l'argent qui eſt au jeu, & $\frac{1}{2}$ en cas de perte, & ainſi en cas de parti il ne lui doit appartenir que la moitié de ces deux ſommes priſes enſemble, c'eſt-à-dire $\frac{11}{16}$, ou 55 piſtoles. Le reſte $\frac{5}{16}$, ou 25 piſtoles, appartiendront au ſecond.

4. Cas. Le ſecond cas ſervira encore à réſoudre ce quatrieme, qui ſuppoſe qu'il manque au premier joueur une partie pour achever, & quatre au ſecond. Car ſi le premier gagne une partie, il remportera les 80 piſtoles qui ſont au jeu, & s'il en perd une, en ſorte qu'il n'en faille plus que trois au ſecond pour achever, il appartiendra au premier les $\frac{7}{8}$ de tout l'argent, par le 2. *cas*. Ainſi puiſqu'en cas de gain, le premier doit emporter

tout l'argent, & qu'en cas de perte il n'en doit emporter que les $\frac{7}{8}$; en cas de parti il ne lui doit appartenir que la moitié de ces deux ſommes priſes enſemble, c'eſt-à-dire, $\frac{15}{16}$, où 75 piſtoles. Le reſte $\frac{1}{16}$, ou 5 piſtoles appartiendront au ſecond.

5. Cas. Ce quatrieme cas & le troiſieme ſerviront de la même façon à réſoudre le ſuivant, qui ſuppoſe qu'il manque deux parties au premier joueur pour achever, & quatre au ſecond. Car ſi le premier gagne une partie, en ſorte qu'il ne lui en manque plus qu'une pour achever, il doit remporter les $\frac{15}{16}$ de l'argent qui eſt au jeu, par le 4. *cas*, & s'il en perd une, en ſorte qu'il n'en manque plus que trois au ſecond, il doit en remporter ſeulement les $\frac{11}{16}$, par le 3. *cas*. Ainſi puiſqu'en cas de gain le premier doit remporter les $\frac{15}{16}$ de tout l'argent, & ſeulement les $\frac{11}{16}$ en cas de perte, il doit en cas de parti prendre la moitié de ces deux ſommes priſes enſemble, c'eſt-à-dire, $\frac{13}{16}$, ou 65 piſtoles. Le reſte $\frac{3}{16}$, ou 15 piſtoles, appartiendront au ſecond. Ainſi des autres.

Autrement & plus facilement.

TOus les cas précédens, & tous les autres infinis qui peuvent arriver, peuvent encore ſe réſoudre autrement ſans le ſecours du triangle arithmétique, & plus facilement en cette ſorte.

6. Cas. Pour réſoudre, par exemple, le cinquieme cas, où

où l'on ſuppoſe qu'il manque deux parties au premier joueur pour achever, & 4 au ſecond, de ſorte qu'il leur manque enſemble 6 parties pour achever, ôtez 1 de cette ſomme 6, & parce qu'il reſte 5, on ſuppoſera ces cinq lettres ſemblables *aaaaa* favorables au premier joueur, & pareillement ces cinq lettres ſemblables *bbbbb* favorables au ſecond joueur. On combinera enſemble ces dix lettres, comme vous le voyez dans cette table, où des 32 combinaiſons, les 26 premiers vers la gauche, où ſe rencontre au moins deux *a*, ſeront priſes pour le nombre des hazards qui peuvent faire gagner le premier, parce qu'il lui manque deux parties: & les ſix dernieres vers la droite, où il y a au moins quatre *b*, ſeront priſes pour le nombre des hazards qui peuvent faire gagner le ſecond, parce qu'il lui manque quatre parties.

aaaaa	*aaabb*	*aabbb*	*abbbb*
aaaab	*aabba*	*abbba*	*bbbba*
aaaba	*abbaa*	*bbbaa*	*babbb*
aabaa	*bbaaa*	*ababb.*	*bbabb*
abaaa	*aabab*	*abbab*	*bbbab*
baaaa	*abaab*	*ababb*	*bbbbb*
	baaab	*baabb*	
	baaba	*babba*	
	babaa	*bbaba*	
	ababa	*babab*	

Ainſi le parti du premier joueur ſera au parti du ſecond, comme 26 eſt à 6, ou comme 13 eſt à 3, &c.

Pareillement, pour réſoudre le troiſieme cas, où l'on ſuppoſe qu'il manque deux parties au premier joueur pour achever, & trois parties au ſe-

cond, de ſorte qu'il leur manque enſemble 5 parties pour achever, ôtez 1 de cette ſomme 5, & parce qu'il reſte 4, ſuppoſez ces quatre lettres ſemblables *aaaa* favorables au premier, & ces quatres lettres ſemblables *bbbb* favorables au ſecond. Combinez enſemble ces huit lettres, comme vous le voyez dans cette table, où des 16 combinaiſons, les 11 premieres à la gauche, où il y a au moins deux *a*, ſeront priſes pour le nombre des haſards qui peuvent faire gagner le premier, parce qu'il lui manque deux parties: & les 5 dernieres vers la droite, où il y a au moins trois *b*, ſeront priſes pour le nombre des haſards qui peuvent faire gagner le ſecond, parce qu'il lui manque trois parties. Ainſi le parti du premier joueur eſt au parti du ſecond, comme 11 eſt à 5, &c.

aaaa	*aabb*	*abbb*
aaab	*abba*	*bbba*
aaba	*bbaa*	*bbab*
abaa	*baab*	*babb*
baaa	*baba*	*bbbb*
	abab	

4. *Cas.* Enfin pour réſoudre le quatrieme cas, où l'on a ſuppoſé qu'il manquoit au premier joueur une partie pour achever, & quatre au ſecond, il vient la même ſomme 5 des parties qui manquent enſemble à ces deux joueurs, on ſe ſervira des 16 combinaiſons précédentes, entre leſquelles on en trouvera 15, où il y aura au moins une lettre *a*, parce qu'il manque au premier joueur une partie, pour le nombre des haſards qui le peuvent faire gagner, & ſeulement une, où il y a quatre *b*, parce qu'il manque au ſecond joueur quatre parties, pour un ſeul haſard qui le peut faire gagner; de ſorte que le parti du même joueur eſt au parti du ſecond, comme 15 eſt à 1. Ainſi des autres.

Du jeu des dez.

POur sçavoir entre deux joueurs l'avantage que peut avoir celui qui entreprend d'amener, par exemple, 6 avec un dé en un certain nombre de coups, & premierement au premier coup, on considérera que le parti à l'entreprendre du premier coup est de 1 contre 5, parce que celui qui tient le dé, n'a qu'un hasard pour gagner, & qu'il en a cinq pour ne rien gagner. Par conséquent pour l'entreprendre en un seul coup, il ne doit mettre que 1 contre 5, ou ce qui est la même chose, parier 1 contre 5. Ce qui fait voir que d'entreprendre d'amener 6 avec un dé en un coup, il y a désavantage.

Pour entreprendre d'amener 6 en deux coups, avec un dé, on considérera que c'est la même chose que d'entreprendre en jettant deux dez à la fois d'en trouver un marqué 6. Alors celui qui tient le dé n'a que 11 hasards pour gagner : car il peut amener 6 avec le premier dé, & 1, 2, 3, 4, 5, avec le second : ou bien 6 avec le second dé, & 1, 2, 3, 4, 5, avec le premier : ou bien encore 6 avec chaque dé. Mais il y a 25 ha-

1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1
1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2
1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3
1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4
1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5

sards pour ne rien gagner, comme vous voyez ici. D'où il est aisé de conclure que celui qui entreprend en deux coups d'amener 6 avec un dé, ne

doit mettre que 11 contre 25, & qu'ainſi il y a déſavantage de l'entreprendre au pair.

Vous prendrez garde que la ſomme 36 de tous les haſards, 11, 25, eſt le quarré du nombre donné 6, quand on entreprend d'amener 6 en deux coups avec un dé, & que le nombre 25 des haſards qui peuvent empêcher celui qui tient le dé de gagner, eſt le quarré du même nombre donné 6 moins 1, c'eſt-à-dire, de 5. C'eſt pourquoi pour trouver le nombre des haſards favorables à celui qui tient le dé, il n'y a qu'à ôter 1 du double 12, du nombre donné 6, & le reſte 11, ſera le nombre qu'on cherche ; on ôtera ce reſte 11 de 36, quarré du même nombre donné 6 : ce ſecond reſte 25, qui ſera toujours un nombre quarré, ſera le nombre des haſards contraires à celui qui tient le dé.

Pour entreprendre d'amener 6 en trois coups avec un dé, on conſidérera pareillement que c'eſt la même choſe que d'entreprendre en jettant trois dés à la fois, d'en trouver un marqué 6. Alors celui qui tient le dé a 91 haſards favorables, & 125 contraires, & ainſi il ne doit mettre que 91 contre 125, où vous voyez qu'il y a encore déſavantage à entreprendre au pair d'amener 6 en trois coups avec un dé.

Vous remarquerez que la ſomme 216 de tous les haſards 91, 125, eſt le cube du nombre donné 6, quand on entreprend d'amener 6 en trois coups avec un dé, & que le nombre 125 des haſards contraires à celui qui tient le dé, eſt le cube du même nombre donné 6 moins 1, c'eſt-à-dire, de 5. C'eſt pourquoi pour trouver le nombre des haſards qui peuvent faire gagner celui qui tient le dé, il n'y a qu'à ôter du cube 216 du

nombre donné 6, le cube 125 du même nombre donné 6 moins 1, ou de 5.

C'eſt de la même façon qu'on trouvera l'avantage que peut avoir celui qui entreprendroit en quatre coups d'amener 6 avec un dé. Car ſi l'on ôte de la quatrieme puiſſance, ou du quarré quarré 1296, du nombre donné 6, le quarré-quarré 625 du même nombre donné 6 moins 1, ou de 5, le reſte donnera 671 haſards favorables à celui qui tient le dé : & le plus petit quarré-quarré précédent 625, ſera le nombre des haſards contraires à celui qui tient le dé. Où vous voyez que celui qui entreprend en quatre coups d'amener 6 avec un dé, peut mettre 671 contre 625, & qu'ainſi il y a avantage à l'entreprendre au pair.

L'avantage ſera plus grand à entreprendre d'amener 6 en cinq coups avec un dé, comme on le connoîtra en ôtant de la cinquieme puiſſance, ou furſolide 7776 du nombre donné 6, le furſolide 3125 du même nombre donné 6 moins 1, ou de 5. Car le reſte 4651 ſera le nombre des haſards favorables à celui qui tient le dé, & le plus petit furſolide précédent 3125, ſera le nombre des haſards contraires à celui qui tient le dé. Où l'on voit que celui qui entreprend en cinq coups d'amener 6 avec un dé, peut mettre 4651 contre 3125, & qu'ainſi il y a de l'avantage à l'entreprendre au pair.

Si vous voulez ſçavoir le parti de celui qui voudroit entreprendre d'amener en un coup avec deux ou pluſieurs dés, une rafle déterminée, par exemple, terne, vous conſidérerez que s'il l'entreprenoit avec deux dés, il n'auroit qu'un haſard pour gagner, & 35 pour perdre : parce que deux dés peuvent ſe combiner en 36 façons différentes, c'eſt-

à-dire, que leurs faces qui ſont au nombre de 6, peuvent avoir 36 aſſiettes différentes, comme vous le voyez dans cette table, ce nombre 36 étant le

1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

quarré du nombre 6 des faces des deux dés. S'il y avoit trois dés, au lieu de 36, quarré de 6, on auroit le cube 216, pour le nombre des combinaiſons entre trois dés; & s'il y avoit quatre dés, on auroit le quarré-quarré 1296, de même nombre 6, pour le nombre des combinaiſons entre quatre dés, & ainſi de ſuite.

D'où il ſuit qu'on ne doit mettre que 1 contre 35, pour faire une rafle déterminée avec deux dés en un coup. On connoîtra par un ſemblable raiſonnement, qu'on ne doit mettre que 3 contre 213, pour faire une rafle déterminée avec trois dés en un coup, & 6 contre 1290, ou 1 contre 215, avec quatre dés, & ainſi de ſuite: parce que des 216 haſards qui ſe trouvent entre trois dés, il y en a 3 pour celui qui tient le dé, puiſque trois choſes ſe peuvent combiner deux à deux en trois façons, & par conſéquent 213 contraires à celui qui tient le dé, & que des 1296 haſards qui ſe trouvent entre quatre dés, il y en a ſix qui ſont favorables à celui qui tient le dé, puiſque quatre choſes ſe combinent deux à deux en ſix façons, & par conſéquent 1290 contraires à celui qui tient le dé.

Mais ſi vous voulez ſçavoir le parti de celui qui entreprendroit de faire une rafle quelconque du premier coup avec deux ou pluſieurs dés, il ne ſera pas difficile de connoître qu'il doit mettre 6 contre 30, ou 1 contre 5, avec deux dés ; parce que ſi de 36 haſards qui ſe trouvent entre deux dés, on ôte 6 haſards, qui peuvent produire une rafle, il reſte 30. On connoîtra auſſi aiſément qu'avec trois dés il peut mettre 18 contre 198, ou 1 contre 11 : parce que ſi de 216 haſard qui ſe rencontrent entre trois dés, on ôte 18 haſards qui peuvent produire une rafle, il reſte 198, &c.

PROBLEME XIV.

Pluſieurs dés étant jettés, trouver le nombre des points qui en proviennent après quelques opérations.

SI quelqu'un a jetté ſur une table, par exemple, trois dés, que nous appellerons A, B, C, dites-lui d'ajouter tous les points de deſſus, & ceux de deſſous de deux dés ſeulement, tels qu'on voudra, comme des deux derniers B, C, puis de mettre à part le troiſieme A, ſans en changer l'aſſiette. Dites-lui enſuite de jetter de nouveau les deux mêmes dés B, C, d'ajouter à la ſomme précédente tous les points de deſſus, & ceux de deſſous de l'un de ces dés, comme du ſecond C, pour avoir une ſeconde ſomme, & de mettre à part le premier B, proche du précédent A, ſans en changer l'aſſiette. Enfin faites-lui jetter le dernier dé C, & dites lui d'ajouter à la ſeconde ſomme précédente le nombre des points de deſſus, pour avoir une troiſieme ſomme, que vous trouverez en cette ſorte. Le troiſieme dé C, ayant été mis près des deux autres

ſans en changer la ſituation, approchez-vous de la table, comptez tous les points qui ſe trouveront au-deſſus de ces trois dés, ajoutez à leur ſomme autant de fois 7 qu'il y a de dés, comme ici trois fois 7, ou 21, (ce nombre 7 étant le nombre des points de deux faces oppoſées d'un dé, quand il eſt bien fait,) la ſomme ſera celle qu'on cherche.

Suppoſons qu'ayant jetté pour la premiere fois les trois dés A, B, C, il ſoit venu en deſſus ces trois points 1, 4, 5 : ayant mis, par exemple, le premier 1 à part, faites ajouter à ces trois points, 1, 4, 5, les deux 3, 2, qui ſe trouvent au-deſſous des deux autres, dont les points de deſſus ſont 4, 5, pour avoir la premiere ſomme 15. Suppoſons maintenant que les deux mêmes dés étant jettés il vienne en deſſus ces deux points 3, 6 : celui qui a trois ayant été mis à part près de celui qui avoit 1, faites ajouter ces deux points 3, 6, & encore 1, qui ſe trouve au deſſous du troiſieme dé reſtant, qui a 6 au deſſus ; la ſomme 10 étant ajoutée à 15 premiere ſomme trouvée, on aura cette ſeconde ſomme 25. Suppoſons enfin que ce troiſieme dé étant jetté ſeul une troiſieme fois, il vienne 6 en deſſus, vous ferez mettre ce dé avec les autres, ſans le changer, & ajouter le 6 à la ſeconde ſomme 25, pour avoir cette troiſieme ſomme 31 : vous devinerez cette derniere ſomme en ajoutant 21, à la ſomme 10 des points 1, 3, 6, qui ſe trouvent au-deſſus des 3 dés reſtans dont vous vous ſerez approché pour connoître cette ſomme 10 de leurs points 1, 3, 6.

REMARQUE.

Ce problême peut ſe réſoudre avec plus de trois

dés, il ne faut qu'obſerver combien de fois on fait ajouter les points de deux faces oppoſées d'un dé, & retenir autant de fois 7, pour les ajouter, après que le dernier dé aura été jetté, à la ſomme des faces du deſſus de tous les dés qu'on aura fait mettre à part. Si l'on avoit jetté quatre dés, par exemple, on trouveroit qu'en faiſant la même choſe qu'on vient de faire, on fait prendre ſix fois les points des deux faces oppoſées d'un dé, & qu'ainſi il faudroit ajouter 6 fois 7, ou 42 à la ſomme des points des faces de deſſus des dés, dont on ſe ſeroit approché. De même on trouveroit que pour cinq dés, on auroit fait prendre dix fois les points des deux faces oppoſées d'un dé, & que par conſéquent il faudroit ajouter 10 fois 7 ou 70 à la ſomme des faces de deſſus des cinq dés dont on ſe ſeroit approché. Ce ſera la même regle pour tel nombre de dés qu'on aura choiſi.

Il faut prendre garde que les dés ſoient marqués, comme on l'a déja dit, en ſorte que les points des deux faces oppoſées étant ajoutés, faſſent 7. La démonſtration de ce problême n'eſt fondée que ſur cette ſtructure; car toutes les fois qu'on fait prendre les points des deux faces oppoſées, on eſt aſſuré que leur ſomme eſt 7. Donc puiſqu'avec trois dés on fait prendre trois fois les points de deux faces oppoſées, c'eſt la même choſe que de faire prendre 21. Par conſéquent ajoutant 21 à tous les autres points qu'on aſſemble, il eſt évident qu'on a la ſomme de tous les points. Il en eſt de même pour tel autre nombre de dés qu'on aura fait jetter.

PROBLEME XV.

Deux dés étant jettés, trouver les points de dessus de chaque dé, sans les voir.

QUelqu'un ayant jetté deux dés sur une table, faites lui ajouter 5 au double des points de dessus de l'un de ces deux dés, puis lui ayant fait multiplier la somme par le même nombre 5, dites-lui d'ajouter au produit le nombre des points de dessus du second dé. Enfin ayant demandé cette seconde somme, ôtez-en 25, quarré du même nombre 5 : le reste sera un nombre composé de deux figures, dont la premiere vers la droite, qui représente les dixaines, sera le nombre des points de dessus du premier dé, & la seconde vers la gauche qui représente les unités, sera le nombre des points de dessus du second dé.

Supposons que le nombre des points de dessus du premier dé soit 2, & que le nombre des points de dessus du second dé soit 3. Si on double 2, nombre des points de dessus du premier dé, & qu'au double 4 on ajoute 5, on aura 9, qui étant multiplié par le même nombre 5, donnera 45, auquel ajoutant 3, nombre des points de dessus du second dé, on aura 48, d'où ôtant 25, quarré du même nombre 5, il reste 23, dont la premiere figure 2 montre le nombre des points de dessus du premier dé, & l'autre figure 3 fait connoître le nombre des points de dessus du second dé.

Autrement.

Ou bien demandez à celui qui a jetté les deux dés, combien font ensemble les points de dessous,

& de combien le nombre des points de dessous de l'un des dés surpasse le nombre des points de dessous de l'autre dé ; si cet excès est, par exemple, 1, & que la somme de tous les points de dessous soit 9, ajoutez ces deux nombres, 1, 9, & ôtez 10, leur somme, de 14 : la moitié 2, du reste 4, sera le nombre des points de dessus de l'un des deux dés. Pour avoir le nombre des points de dessus de l'autre dé, au lieu d'ajouter l'excès 1 à la somme 9, il le faut ôter, & ayant ôté de 14 le reste 8, on aura ce second reste 6 dont la moitié 3 sera le nombre qu'on cherche.

Encore autrement.

Ou bien encore, dites à celui qui a jetté les deux dés, d'ajouter les points de dessus, & de vous dire leur somme, qui fera, par exemple, 5. Dites-lui encore de multiplier le nombre des points de dessus d'un dé, par le nombre des points de dessous de l'autre dé, & de vous dire leur produit, que nous supposerons 6. Par le moyen de ce produit & de la somme précédente 5, vous trouverez le nombre des points de dessus de chaque dé en cette sorte. Multipliez la somme 5 par elle-même, pour avoir son quarré 25, duquel vous ôterez 24 quadruple du produit 6, & il reste 1, dont vous prendrez la racine quarrée, qui est aussi 1, laquelle étant ajoutée & ôtée de la somme précédente 5, donnera ces deux nombres, 6, 4, dont les moitiés, 3, 2, seront les nombres des points de dessus de chaque dé.

PROBLEME XVI.

Trois dés étant jettés, trouver les points de dessus de chaque dé sans les voir.

QUelqu'un ayant jetté trois dés sur une table, faites les ranger en ligne droite l'un près de l'autre. Demandez la somme des points de dessous du premier & du second dé, qui sera, par exemple, 9, celle des points de dessous du second & du troisieme dé, que nous supposerons 5 ; enfin la somme des points de dessous du premier & du troisieme dé qui soit 6. Par le moyen de ces trois sommes ou nombres connus, 9, 5, 6, on trouvera le nombre des points de dessus du premier dé : car en ôtant de 15, somme du premier & du troisieme nombre, le second 5, & en ôtant de 14 le reste 10, on aura cet autre reste 4, dont la moitié 2 sera le nombre des points de dessus du premier dé. Pour trouver le nombre des points de dessus du second dé, ôtez de 14, somme des deux premiers nombres, 9, 5, le troisieme ; puis ôtez de 14 le reste 8, pour avoir un second reste 6, dont la moitié 3 sera le nombre des points de dessus du second dé. Enfin pour avoir le nombre des points de dessus du troisime dé, ôtez de 11, somme du second nombre 5, & du troisieme 6, le premier 9 ; ensuite ôtez de 14 le reste 2, pour avoir un second reste 12, dont la moitié 6 sera le nombre des points de dessus du troisieme dé.

Autrement.

Les trois dés ayant été jettés, faites doubler le nombre des points de l'un de ces dés, puis

vous ferez ajouter 5 à ce double, multiplier la ſomme par 5, & ajouter 10 à ce produit. Faites enſuite ajouter à ce total, le nombre des points du ſecond dé, & multiplier cette ſomme par 10. Enfin ayant ajouté à ce dernier produit le nombre des points du troiſieme dé, vous demanderez la ſomme qui ſera venue après toutes ces opérations. Vous en ôterez 350, & les trois nombres qui reſteront, marqueront le nombre des points de chaque dé; en ſorte que celui qui ſera à la place des centaines, ſera le nombre des points du premier dé; celui qui ſera à la place des dixaines, ſera le nombre des points du ſecond dé, & celui qui ſera à la place des unités, ſera le nombre des points du troiſieme dé.

Si, par exemple, on amene ces trois nombres 2, 3, 6, le double de 2 eſt 4, auquel ajoutant 5, il vient 9, qui étant multiplié par 5, donne 45, auquel on ajoutera 10, & l'on aura 55. Enſuite ayant ajouté 3, nombre des points du ſecond dé, à cette ſomme 55, on aura 58, qui étant multiplié par 10, donnera 580. Enfin on ajoutera 6, nombre des points du troiſieme dé, à 580 la ſomme ſera 586. Toutes ces opérations auront été faites en ſecret. Mais lorſque vous ſçaurez que le total eſt 586, vous en ôterez 350, il reſtera 236. Chacun de ces chiffres pris de ſuite, marque le nombres des points de chaque dé, 2, 3, 6.

REMARQUE.

On vient de voir que quand on a jetté trois dés, il falloit ôter 350 de la ſomme demandée & connue; mais ſi l'on avoit jetté quatre dés, il faudroit continuer à faire la même choſe pour le qua-

trieme dé, que ce qu'on a fait pour les trois autres, & ôter de la somme demandée 3500. Il en est de même pour un plus grand nombre de dés, il faudra ôter de la somme demandée le nombre 350, augmenté d'autant de zeros qu'il y aura de dés qui surpasseront les trois qu'on a d'abord jetté. Par exemple, s'il y avoit quatre dés, dont les points fussent 3, 5, 8, 2, ayant fait doubler le 3, point du premier dé, il viendra 6, auquel faisant ajouter 5, la somme sera 11, qui multipliée par 5, donne 55 : & faisant ajouter 10 à ce produit, on aura 65. Ensuite on fera ajouter à 65 le 5, point du second dé, & l'on aura 70, qui multiplié par 10, donnera 700, auquel on fera ajouter le 8, point du troisieme dé, & la somme sera 708 : cette somme ayant été multipliée par 10, il viendra 7080. On fera ajouter le 2, point du quatrieme dé à ce produit, on aura 7082. Enfin après avoir connu cette somme 7082, on en ôtera 3500, & le reste 3582 exprimera par ordre les points de chaque dé, 3, 5, 8, 2.

On voit que les points 8, 2, des deux derniers dés, n'ont point été changés par les opérations ; c'est pourquoi afin de mieux couvrir l'artifice, il seroit à propos de faire ajouter à la somme totale 7082 quelque nombre, comme 12, l'on auroit 7094 : puis ayant demandé cette derniere somme, on en ôteroit 3512, & il resteroit le même nombre qu'auparavant 3582.

La méthode qu'on vient de proposer pour deviner les points de plusieurs dés jettés, peut très-bien servir à deviner plusieurs nombres pensés. Ainsi on peut l'ajouter à toutes les diverses manieres qu'on va enseigner dans les problêmes suivans.

PROBLEME XVII.

Deviner le nombre que quelqu'un a pensé.

I.

FAites multiplier par lui-même le nombre pensé; dites ensuite d'ajouter à ce quarré le double du nombre pensé; puis faites ajouter l'unité à la somme du quarré & du double : enfin ayant demandé quelle est cette somme, vous en tirerez la racine quarrée, d'où ayant ôté l'unité, il restera le nombre pensé.

Comme si quelqu'un a pensé 6, le quarré de ce nombre est 36, auquel si on ajoute 12 double de 6, on aura 48 : ce nombre augmenté de l'unité, donnera 49. On tirera la racine quarrée de 49, qui est 7, ôtant 1 de 7, on aura 6 pour le nombre pensé.

II.

Ayant fait ôter 1 du nombre pensé, faites doubler le reste : ayant encore fait ôter 1 de ce double, faites ajouter au reste le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui vient de cette addition, ajoutez-y 3; la troisieme partie de cette somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on en ôte 1, il restera 4, dont le double 8 étant diminué de 1, & le reste 7 étant augmenté du nombre pensé 5, on a cette somme 12, à laquelle ajoutant 3, on a cette autre somme 15, dont la troisieme partie 5 est le nombre pensé.

III.

Ou bien après avoir fait ôter 1 du nombre pensé,

faites tripler le reste, & après avoir aussi fait ôter 1 de ce triple, faites ajouter au reste le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui vient de cette addition, vous y ajouterez 4 ; la quatrieme partie de cette somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on en ôte 1, il restera 4, dont le triple 12 étant diminué de 1, & le reste 11 étant augmenté du nombre pensé 5, on a cette somme 16, à laquelle ajoutant 4, on a cette autre somme 20, dont la quatrieme partie 5 est le nombre pensé.

IV.

Ayant fait ajouter 1 au nombre pensé, faites doubler la somme : ayant encore fait ajouter 1 à ce double, faites ajouter à la somme le nombre pensé : enfin demandez le nombre qui vient de cette derniere addition, dont vous ôterez 3, la troisieme partie du reste sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on y ajoute 1, on aura 6, dont le double 12 étant augmenté de 1, & la somme 13 étant augmentée du nombre pensé 5, on a cette somme 18, de laquelle ôtant 3, il restera 15, dont la troisieme partie 5 est le nombre pensé.

V.

Ou bien après avoir fait ajouter 1 au nombre pensé, faites tripler la somme ; après avoir aussi fait ajouter 1 à ce triple, faites ajouter à la somme le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui vient de cette derniere addition, vous en ôterez 4 ; la quatrieme partie du reste sera le nombre pensé.

Comme

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on y ajoute 1, on aura 6, dont le triple 18 étant augmenté de 1, & la somme 19 étant augmentée du nombre pensé 5, on a cette somme 24, de laquelle ôtant 4, il restera 20, dont la quatrieme partie 5 est le nombre pensé.

VI.

Ayant fait ôter 1 du nombre pensé, faites doubler le reste : ayant encore fait ôter 1 de ce double, faites ôter du reste le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui reste de cette derniere soustraction, vous y ajouterez 3, la somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on en ôte 1, il restera 4; dont le double 8 étant diminué de 1, & le reste 7 étant encore diminué du nombre pensé 5, il reste 2 : auquel ajoutant 3, la somme 5 est le nombre pensé.

VII.

Ayant fait ajouter 1 au nombre pensé, faites doubler la somme : ayant encore fait ajouter 1 à ce double, faites ôter de la somme le nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui reste de cette soustraction, vous en ôterez 3, le reste sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on y ajoute 1, on aura 6, dont le double 12 étant augmenté de 1, & la somme 13 étant diminuée du nombre pensé 5, il restera 8, dont ôtant 3, le reste 5 est le nombre pensé.

VIII.

Après avoir fair ôter 1 du nombre pensé, faites tripler le reste, & après avoir aussi fait ôter 1 de

ce triple, faites ôter du reste le double du nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui reste de cette derniere soustraction, vous ajouterez 4 ; la somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on en ôte 1, il restera 4, dont le triple 12 étant diminué de 1, & le reste 11 étant encore diminué de 10, double du nombre pensé, il reste 1, auquel ajoutant 4, la somme 5 est le nombre pensé.

IX.

Après avoir fait ajouter 1 au nombre pensé, faites tripler la somme, & après avoir aussi fait ajouter 1 à ce triple, faites ôter de la somme le double du nombre pensé : enfin ayant demandé le nombre qui reste, vous en ôterez 4, le reste sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on y ajoute 1, on aura 6, dont le triple 18 étant augmenté de 1, & la somme 19 étant diminuée de 10, double du nombre pensé 5, on a ce reste 9, dont ôtant 4, le reste 5 est le nombre pensé.

X.

Dites à celui qui aura pensé un nombre, de multiplier ce nombre par 3, & de prendre la moitié de ce triple, au cas qu'il le puisse faire sans reste, s'il ne peut le faire sans reste, vous lui ferez ajouter 1 à ce triple, pour en pouvoir prendre justement la moitié, que vous ferez encore multiplier par 3. Après quoi vous demanderez combien il y a de fois 9 dans ce dernier triple, & vous prendrez autant de fois 2 qu'il y aura de fois 9, pour le nombre qui aura été pensé. Mais vous vous souviendrez d'ajouter 1, si vous l'avez fait ajou-

ter auparavant, lorsque la division par 2 n'aura pu se faire sans reste.

Comme si l'on a pensé 5, son triple est 15, dont on ne peut prendre exactement la moitié; c'est pourquoi on y ajoutera 1, & l'on aura 16, dont la moitié 8 étant multipliée encore par 3, on a ce produit 24, dans lequel 9 est compris 2 fois: donc prennant 2 fois 2, on a ce nombre 4, auquel ajoutant 1, qu'on a fait ajouter auparavant, la somme 5 est le nombre pensé.

Remarquez que le nombre pensé sera 1, lorsque le nombre 9 ne sera point contenu dans le dernier triple.

Pour ôter les 9 autant de fois qu'il se pourra, faites ôter 27, ou 36, ou 72, &c. si ces nombres y sont contenus, puis faites ôter 9 du reste, si cela se peut, & ainsi autant de fois qu'il sera possible. C'est une maniere différente de celle qu'on vient d'enseigner.

XI.

Faites ajouter & ôter 1 du nombre pensé, pour avoir une somme & un reste que vous ferez multiplier ensemble, & demandez le produit qui vient de la multiplication: si vous ajoutez 1 à ce produit, la racine quarrée de la somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, ajoutant 1 à 5, on a la somme 6, & ôtant 1 de 5, on a le reste 4; puis multipliant la somme 6 par le reste 4, on a un produit 24, auquel ajoutant 1, la racine quarrée 5 de la somme 25 est le nombre pensé.

XII.

Ayant fait ajouter 1 au nombre pensé, faites

multiplier la ſomme par le nombre penſé, & faites ôter du produit le même nombre penſé : enfin demandez le nombre qui reſtera de cette ſouſtraction, la racine quarrée de ce reſte ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, ajoutant 1 à 5, on a 6, qui étant multiplié par le nombre penſé 5, donne 30, d'où ôtant le même nombre penſé 5, il reſte 25, dont la racine quarrée 5 eſt le nombre penſé.

XIII.

Ou bien ayant fait ôter 1 du nombre penſé, faites multiplier le reſte par le nombre penſé ; puis faites ajouter au produit le même nombre penſé : enfin demandez la ſomme qui vient de cette addition ; la racine quarrée de cette ſomme ſera le nombre penſé.

Comme l'on a penſé 5, ôtant 1 de 5, il reſte 4, qui étant multiplié par le nombre penſé 5, donne 20, auquel ajoutant le même nombre penſé 5, on a 25, dont la racine quarrée 5 eſt le nombre penſé.

XIV.

Ayant fait ajouter 2 au nombre penſé, faites ajouter à la ſomme un 0 vers la droite, pour avoir un nombre dix fois plus grand, auquel vous ferez ajouter 12 ; vous ferez encore ajouter à la ſomme un 0 vers la droite, pour avoir un nombre dix fois plus grand, dont vous ferez ôter 320 : enfin vous demanderez le reſte, dont les figures ſignificatives vers la gauche, en retranchant les deux zero, qui ſe rencontrent toujours à la droite, repréſenteront le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 5, en y ajoutant 2, on a 7, auquel ajoutant un 0 vers la droite, on a 70,

auquel si l'on ajoute 12, on a 82; puis ajoutant encore un o vers la droite, on a 820, d'où ôtant 320, il reste 500, dont retranchant les deux zeros à la droite, le reste 5 est le nombre pensé.

XV.

Ayant fait ajouter 5 au double du nombre pensé, faites ajouter à la somme un o vers la droite, pour avoir un nombre dix fois plus grand, auquel vous ferez ajouter 20: puis vous ferez encore ajouter à la somme un o vers la droite, pour avoir un nombre dix fois plus grand, dont vous ferez ôter 700; enfin vous demanderez le reste, dont vous retrancherez les deux zeros, qui se rencontreront toujours à la droite, & la moitié du nombre qui restera vers la gauche, sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, en ajoutant 5 à son double 10, on a 15, auquel ajoutant un o vers la droite, on a 150, auquel si l'on ajoute 20, on a 170; puis ajoutant à ce nombre un o vers la droite, on a 1700, d'où ôtant 700, on a 1000, dont retranchant deux zeros à la droite, la moitié 5 du reste 10, est le nombre pensé.

XVI.

Ces deux dernieres méthodes ne sont pas extrêmement subtiles, parce que le dernier nombre étant connu, il est aisé, en rétrogradant, de connoître les autres nombres, & par conséquent le nombre pensé. C'est pourquoi il vaudra mieux se servir des deux méthodes suivantes, dont le secret est plus caché.

Ayant fait ajouter 1 au triple du nombre pensé, faite multiplier la somme par 3; puis ayant fait

ajouter à ce triple le nombre pensé, demandez le nombre qui viendra de cette addition; car si vous ôtez 3 de cette somme, & que du reste vous retranchiez le 0 qui se trouvera à la droite, le reste vers la gauche sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, ajoutant 1 à son triple 15, on a 16, dont le triple est 48, auquel ajoutant le nombre pensé 5, on a 53, d'où ôtant 3, & retranchant du reste 50 le 0 qui est à la droite, il reste 5 vers la gauche pour le nombre pensé.

XVII.

Ayant fait ôter 1 du triple du nombre pensé, faites multiplier le reste par 3; puis ayant fait ajouter au produit le nombre pensé, demandez le nombre qui vient de cette addition; car si vous ajoutez 3 à cette somme, & que de cette seconde somme vous retranchiez le 0 qui se trouvera à la droite, le reste vers la gauche sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, en ôtant 1 de son triple 15, il reste 14, dont le triple est 42, auquel ajoutant le nombre pensé 5, on a 47, auquel ajoutant 3, & retranchant de la somme 50 le 0 qui est à la droite, il reste 5 vers la gauche pour le nombre pensé.

COROLLAIRE.

Il suit de ces deux dernieres méthodes, que, *si on ajoute l'unité au triple d'un nombre quelconque, & qu'on ajoute le même nombre au triple de la somme, on aura une seconde somme qui se terminera par 3*. Comme si on ajoute l'unité au triple 18 du nombre 6, & qu'on ajoute le même nombre 6 au

triple 57 de la ſomme 19, on a cette ſeconde ſomme 63, qui ſe termine par 3.

Il s'enſuit auſſi que *ſi on ôte l'unité du triple d'un nombre quelconque, & qu'on ajoute le même nombre au triple du reſte, on aura une ſomme qui ſe terminera par 7.* Comme ſi on ôte l'unité du triple 18 du nombre 6, & qu'on ajoute le même nombre 6, au triple 51 du reſte 17, on a cette ſomme 57, qui ſe termine par 7.

Enfin il s'enſuit que ce problême double eſt impoſſible; *trouver un nombre tel, que ſi on ajoute l'unité à ſon triple, ou qu'on ôte l'unité de ſon triple, & qu'on ajoute le même nombre au triple de la ſomme, ou du reſte, la ſomme ſoit un quarré parfait*, parce que tout nombre qui finit par 3, ou par 7, ne peut avoir une racine quarrée exacte, comme on a dit au problême VIII, p. 19. Voyez le problême ſuivant.

PROBLEME XVIII.

Trouver le nombre qui reſte à quelqu'un après quelques opérations, ſans lui rien demander.

AYant fait penſer un nombre à volonté, faites ajouter à ſon double un nombre pair, tel qu'il vous plaira, par exemple, 8; puis faites ôter de la moitié de la ſomme le nombre penſé: ce qui reſtera ſera la moitié du nombre pair que vous aviez fait ajouter auparavant; ſçavoir, 4. Ainſi vous direz hardiment qu'il reſte 4; ce qui ſurprendra agréablement ceux qui n'en verront pas d'abord la raiſon, quoique la démonſtration en ſoit facile.

C'eſt pourquoi pour ſçavoir adroitement le nombre qui aura été penſé, faites ſemblant d'ignorer le reſte 4, & faites-le ôter du nombre penſé, ſi le

nombre pensé est plus grand ; ou faites-en ôter le nombre pensé, si le nombre pensé est plus petit ; puis demandez le reste. Si vous ajoutez ce reste à la moitié 4 du nombre 8, que vous aviez fait ajouter au nombre pensé, si le nombre pensé a été trouvé plus grand que cette moitié 4, ou si vous ôtez ce reste de la même moitié 4, si le nombre pensé a été trouvé plus petit que cette moitié 4, vous aurez le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on ajoute 8 à son double 10, on aura 18, dont la moitié est 9, d'où ôtant le nombre pensé 5, il reste 4, moitié de 8, nombre ajouté, & si l'on ôte cette moitié 4, du nombre pensé 5 qui est plus grand, il restera 1 ; ce reste étant ajouté à la même moitié 4, parce que le nombre pensé 5 s'est trouvé plus grand que cette moitié 4, on aura la somme 5, qui est le nombre pensé.

De même, si on ajoute 12 au double 10 du nombre pensé 5, on aura 22, dont la moitié est 11, d'où ôtant le nombre pensé 5, il reste 6, moitié du nombre ajouté 12 ; & si de cette moitié 6 on ôte le nombre pensé 5, qui est le plus petit, il restera 1 ; ce reste étant ôté de la même moitié 6, parce que le nombre pensé 5, s'est trouvé moindre que cette moitié 6, on aura un autre reste 5, qui est le nombre pensé.

Autrement.

Faites ôter du double du nombre pensé un nombre pair moindre & tel qu'il vous plaira, par exemple, 4 : faites encore ôter la moitié du reste du nombre pensé, le reste sera 2, moitié du nombre ôté 4 : c'est pourquoi pour trouver le nombre pensé, faites ajouter à cette moitié 2 le nom-

bre pensé, & demandez la somme qui soit, par exemple, 7, dont si vous ôtez la même moitié 2, le reste 5 sera le nombre pensé.

Autrement.

On peut encore trouver plus facilement le nombre que quelqu'un aura pensé, en lui faisant ajouter un nombre à volonté, & en faisant multiplier la somme par le nombre pensé. Ensuite ayant fait ôter du produit le quarré du nombre pensé, demandez le reste, & divisez ce reste par le nombre que vous avez fait ajouter, le quotient sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on y ajoute, par exemple, 4, on aura 9, qui étant multiplié par le nombre pensé 5, on a 45, d'où ôtant le quarré 25 du nombre pensé 5, & le reste 20 étant divisé par le nombre 4, qui a été ajouté auparavant, le quotient donne 5 pour le nombre pensé.

Autrement.

Ou bien faites ôter du nombre pensé un nombre plus petit, tel qu'il vous plaira : faites multiplier le reste par le nombre pensé, faites ôter ce produit du quarré du nombre pensé, demandez le reste, & divisez ce reste par le nombre que vous avez fait ôter du nombre pensé, le quotient sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5 & qu'on en ôte, par exemple, 3, il restera 2, qui étant multiplié par le nombre pensé 5, produit 10. Ce nombre 10 étant ôté de 25, quarré du nombre pensé 5, il reste 15, qui étant divisé par le nombre 3, qui a été ôté du nombre pensé, donne pour quotient 5, qui est le nombre pensé.

Autrement.

La maniere la plus facile de toutes pour deviner le nombre que quelqu'un aura pensé, est la suivante. Faites ôter du nombre pensé un nombre plus petit, tel qu'il vous plaira, & mettre le reste à part. Faites ajouter le même nombre au nombre pensé, & ajouter à la somme le reste précédent, pour avoir une seconde somme, que vous demanderez; la moitié de cette somme sera le nombre pensé.

Comme si l'on a pensé 5, & qu'on en ôte, par exemple, 3, il restera 2; si l'on ajoute le même nombre 3 au nombre pensé 5, on aura 8, auquel ajoutant le precédent reste 2, on a 10, dont la moitié 5 est le nombre pensé.

PROBLEME XIX.

Trouver le nombre que quelqu'un aura pensé, sans lui rien demander.

FAites ajouter au nombre pensé sa moitié, s'il est pair, ou sa plus grande moitié, s'il est impair, pour avoir une premiere somme. Faites aussi ajouter à cette somme sa moitié, ou sa plus grande moitié, selon qu'elle sera un nombre pair ou impair, pour avoir une seconde somme, dont vous ferez ôter le double du nombre pensé; ensuite faites prendre la moitié du reste, ou sa plus petite moitié, au cas que ce reste soit un nombre impair, continuez à faire prendre la moitié de la moitié, jusqu'à ce qu'on vienne à l'unité. Cela étant fait, remarquez combien de soudivisions on aura faites, & pour la premiere division retenez 2, pour la seconde 4, pour la troisieme 8, & ainsi des autres

en proportion double. Obſervez qu'il faut ajouter 1 pour chaque fois que vous aurez pris la plus petite moitié, parce qu'en prenant cette plus petite moitié, il reſte toujours 1, & qu'il faut ſeulement retenir 1, lorſqu'on n'aura pu faire aucune ſouſdiviſion; car ainſi vous aurez le nombre dont on a pris les moitiés des moitiés, alors le quadruple de ce nombre ſera le nombre penſé, au cas qu'il n'ait point fallu prendre au commencement la plus grande moitié, ce qui arrivera ſeulement lorſque le nombre penſé ſera pairement pair, ou diviſible par 4; autrement on ôtera 3 de ce quadruple ſi à la premiere diviſion l'on a pris la plus grande moitié, ou bien ſeulement 2, ſi à la ſeconde diviſion l'on a pris la plus grande moitié, ou bien enfin 5, ſi à chacune des deux diviſions on a pris la plus grande moitié, & alors le reſte ſera le nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 4, en lui ajoutant ſa moitié 2, on a 6, auquel ſi l'on ajoute pareillement ſa moitié 3, on a 9, d'ou ôtant le double 8 du nombre penſé 4, il reſte 1, dont on ne ſçauroit prendre la moitié, parce qu'on eſt parvenu à l'unité; c'eſt pourquoi on retiendra 1, dont le quadruple 4 eſt le nombre penſé.

Si l'on a penſé 5, en lui ajoutant ſa plus grande moitié 3, on a 8, auquel ſi on ajoute ſa moitié 4, on a 12, d'où ôtant le double 10 du nombre penſé 5, il reſte 2, dont la moitié eſt 1: & comme l'on ne ſçauroit plus prendre la moitié, parce qu'on eſt parvenu à l'unité, on retiendra 2, parce qu'il y a une ſouſdiviſion. Si de 8, quadruple de ce nombre retenu 2, on ôte 3, parce que dans la premiere diviſion on a pris la plus grande moitié, le reſte 5 eſt le nombre penſé.

Si le nombre pensé eſt 6, en lui ajoutant ſa moitié 3, on a 9, auquel ſi l'on ajoute ſa plus grande moitié 5, on a 14, d'où ôtant le double 12 du nombre penſé 6, il reſte 2, dont la moitié eſt 1 : comme l'on ne ſçauroit plus prendre la moitié, parce qu'on eſt parvenu à l'unité, on retiendra 2, parce qu'il y a une ſouſdiviſion. Si de 8, quadruple de ce nombre retenu 2, on ôte 2, parce que dans la ſeconde diviſion, l'on a pris la plus grande moitié, le reſte 6 eſt le nombre penſé.

Si l'on a penſé 7, en lui ajoutant ſa plus grande moitié 4, on a 11, auquel ſi l'on ajoute pareillement ſa plus grande moitié 6, on a 17; d'où ôtant le double 14 du nombre penſé 7, il reſte 3, dont la plus petite moitié eſt 1, & comme l'on ne ſçauroit plus prendre la moitié, parce qu'on eſt parvenu à l'unité, on retiendra 2, auquel on ajoutera 1, parce qu'on a pris la plus petite moitié; ainſi on aura 3, dont le quadruple eſt 12, duquel ôtant 5, parce que dans la premiere & dans la ſeconde diviſion l'on a pris la plus grande moitié, le reſte 7 eſt le nombre penſé. Ainſi des autres.

PROBLEME XX.

Deviner deux nombres que quelqu'un aura penſé.

I.

AYant fait ajouter enſemble les deux nombres penſés, pour avoir leur ſomme, & ayant fait ôter le plus petit du plus grand, pour avoir leur différence, faites multiplier la ſomme par la différence, & ajouter au produit le quarré du plus petit nombre penſé. Alors demandez le nombre qui vient de cette addition, & prenez-en la racine

quarrée qui ſera le plus grand des deux nombres penſés. Pour avoir le plus petit, au lieu de faire ajouter au produit le quarré du plus petit nombre penſé, faites ôter ce produit du quarré du plus grand nombre penſé, & demandez le nombre qui reſtera : la racine quarrée de ce reſte ſera le plus petit nombre penſé.

Comme ſi l'on a penſé 3 & 5, en multipliant leur ſomme 8 par leur différence 2, on a le produit 16, auquel ajoutant le quarré 9 du plus petit nombre penſé 3, on a 25, dont la racine quarrée 5 eſt le plus grand des deux nombres penſés : & ôtant le même produit 16 de 25, quarré du plus grand nombre penſé 5, il reſte 9, dont la racine quarrée 3 eſt le plus petit nombre penſé.

II.

Faites ajouter à la ſomme des deux nombres penſés leur différence, & demandez le nombre qui vient de cette addition ; la moitié de ce nombre ſera le plus grand des deux nombres penſés. Pour avoir le plus petit, faites ôter la différence des deux nombres penſés de leur ſomme, & demandez le nombre qui reſtera ; la moitié de ce reſte ſera le plus petit nombre penſé.

Comme dans cet exemple, en ajoutant la différence 2 des deux nombres penſés à leur ſomme 8, on a 10, dont la moitié 5 eſt le plus grand des deux nombres penſés ; & en ôtant la différence 2 de la ſomme 8, il reſte 6, dont la moitié 3 eſt le plus petit nombre penſé.

III.

Faites multiplier la ſomme de deux nombres penſés par elle-même, pour avoir ſon quarré ;

puis ayant fait ajouter au plus petit des deux nombres pensés, le double du plus grand, & ayant fait multiplier la somme par le plus petit, faites ôter le produit du précédent quarré, & demandez le reste ; la racine quarrée de ce reste sera le plus grand des deux nombres pensés. Pour avoir le plus petit, ayant fait ajouter au plus grand le double du plus petit, & ayant fait multiplier la somme par le plus grand, faites ôter le produit du précédent quarré, & demandez le reste dont la racine quarrée sera le plus petit nombre pensé.

Comme dans cet exemple, où l'on a supposé que les deux nombres pensés sont 3 & 5, leur somme est 8, qui étant multiplié par soi-même, donne 64 pour son quarré. En ajoutant au plus petit nombre pensé 3 le double 10 du plus grand 5, on a 13, qui étant multiplié par le plus petit 3, donne 39 ; ce produit 39 étant ôté du précédent quarré 54, il reste 25, dont la racine quarrée 5 est le plus grand des deux nombres pensés. En ajoutant au plus grand nombre pensé 5 le double 6 du plus petit 3, on a 11, qui étant multiplié par le plus grand 5 produit 55 ; ce produit 55 étant ôté du précédent quarré 64, il reste 9, dont la racine quarrée 3 est le plus petit nombre pensé.

IV.

Faites multiplier ensemble les deux nombres pensés, pour avoir leur produit. Faites aussi multiplier la somme des deux mêmes nombres par celui que vous voulez trouver, & faites ôter de ce produit le produit des deux nombres : après quoi vous demanderez le reste, dont la racine quarrée sera le nombre que vous cherchez.

Comme dans cet exemple, si l'on multiplie en-

ſemble les deux nombres penſés 3, 5, on aura leur produit 15, & ſi l'on multiplie leur ſomme 8 par le plus grand nombre 5, ſi vous le voulez trouver, on a ce produit 40, d'où ôtant le précédent produit 15, il reſte 25, dont la racine quarrée 5 eſt le nombre qu'on cherche.

V.

Après avoir fait multiplier enſemble les deux nombres penſés, pour avoir leur produit, faites multiplier leur différence par le nombre que vous cherchez ; & faites ajouter à ce produit, le produit des deux nombres, ſi vous demandez le plus grand nombre, ou bien faites ôter ce produit du produit des deux nombres, ſi vous demandez le plus petit : alors ſi vous demandez le nombre qui vient de cette addition, ou de cette ſouſtraction, & que vous en preniez la racine quarrée, vous aurez le nombre que vous cherchez.

Comme dans cet exemple, après avoir multiplié enſemble les deux nombre penſés 3, 5, pour avoir leur produit 15, ſi l'on fait multiplier leur différence 2, par le plus grand nombre 5, & qu'on ajoute le produit 10 au premier produit 15, on aura 25, dont la racine quarrée 5 eſt le plus grand nombre. De même, ſi l'on multiplie leur différence 2 par le plus petit nombre 3, & qu'on ôte le produit 6 du premier 15, il reſtera 9, dont la racine quarrée 3 eſt le plus petit nombre penſé.

VI.

Lorſque le plus petit des deux nombres penſés ne paſſera pas 9, on les pourra deviner très-facilement en cette ſorte. Ayant fait ajouter 1 au triple du plus grand des deux nombres penſés, fai-

tes encore ajouter au triple de cette somme les deux nombres pensés, & demandez le nombre qui vient de cette addition; si vous en ôtez 3, la premiere figure du reste vers la droite sera le plus petit nombre pensé, & ce qui restera vers la gauche, sera le plus grand.

Comme dans l'exemple qui vient d'être proposé, où les deux nombres sont 3, 5, ajoutant 1 à 15, triple du plus grand 5, on a 16, & ajoutant à 48 triple de cette somme 16, les deux nombres pensés 3, 5, ou 8, on a 56, d'où ôtant 3, il reste 53, dont la premiere figure 3 vers la droite, est le plus petit nombre pensé, & l'autre figure 5, qui reste vers la gauche, est le plus grand.

PROBLEME XXI.

Deviner plusieurs nombres que quelqu'un aura pensé.

I

SI la multitude des nombres pensés est impaire, demandez les sommes du premier & du second, du second & du troisieme, du troisieme & du quatrieme, & ainsi de suite jusqu'à la somme du premier & du dernier. Ayant écrit toutes ces sommes par ordre, en sorte que la somme du premier & du dernier soit la derniere, ôtez toutes les sommes qui seront dans les lieux pairs de toutes celles qui seront dans les lieux impairs, & la moitié du reste sera le premier nombre pensé, lequel étant ôté de la premiere somme, il restera le second nombre pensé, lequel étant pareillement ôté de la seconde somme, le reste sera le troisieme nombre pensé, & ainsi de suite.

Comme

Comme si l'on a pensé ces cinq nombres, 2, 4, 5, 7, 8, les sommes du premier & du second, du second & du troisieme, & ainsi des autres jusqu'à la somme du premier & du cinquieme sont, 6, 9, 12, 15, 10: ôtant 24, somme des deux 9, 15, qui sont dans les lieux pairs de la somme 28 des trois 6, 12, 10, qui sont dans les lieux impairs, il reste 4, dont la moitié 2 est le premier nombre pensé, lequel étant ôté de la premiere somme 6, le reste 4 est le second nombre pensé, lequel étant pareillement ôté de la seconde somme 9, il reste 5 pour le troisieme nombre pensé, &c.

II.

Si la multitude des nombres pensés est paire, demandez les sommes du premier & du second, du second & du troisieme, du troisieme & du quatrieme, & ainsi de suite jusqu'à la somme du second & du dernier. Ayant écrit toutes ces sommes par ordre, en sorte que la somme du second & du dernier soit la derniere, ôtez de toutes les sommes qui seront dans les lieux páirs toutes celles qui seront dans les lieux impairs, excepté la premiere : la moitié du reste sera le second nombre pensé, par le moyen duquel il sera facile de trouver les autres ; car si on l'ôte de la premiere somme, il restera le premier nombre pensé ; & si on l'ôte de la seconde somme, le reste sera le troisieme nombre pensé, lequel étant pareillement ôté de la troisieme somme, on aura pour reste le quatrieme nombre pensé, & ainsi de suite.

Comme si l'on a pensé ces six nombres, 2, 4, 5, 7, 8, 9, les sommes du premier & du second, du second & du troisieme, du troisieme & du quatrieme, ainsi de suite jusqu'à la somme du second

& du ſixieme, ſeront 6, 9, 12, 15, 17, 13: ôtant 29, ſomme de la troiſieme 12, & de la cinquieme 17, qui ſont dans les lieux impairs, en omettant la premiere, de 37, ſomme des trois 9, 15, 13, qui ſont dans les lieux pairs, il reſte 8, dont la moitié 4 eſt le ſecond nombre penſé, lequel étant ôté de la premiere ſomme 6, le reſte 2 eſt le premier nombre penſé; & étant ôté de la ſeconde ſomme 9, le reſte 5 eſt le troiſieme nombre penſé, lequel étant pareillement ôté de la troiſieme ſomme 12, il reſte 7 pour le quatrieme nombre penſé, & ainſi de ſuite.

III.

Lorſque chacun des nombres penſés ne ſera composé que d'une figure, on les pourra trouver très-facilement en cette ſorte. Ayant fait ajouter 1 au double du premier nombre penſé, faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le ſecond nombre penſé. S'il y a un troiſieme nombre, ayant fait pareillement ajouter 1 au double de la ſomme précédente, faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le quatrieme nombre penſé. De même, s'il y a un troiſieme nombre, ayant fait auſſi ajouter 1 au double de la derniere ſomme précédente, faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le quatrieme nombre penſé, & ainſi de ſuite, s'il y a davantage de nombres penſés. Après cela demandez le nombre qui vient de l'addition du dernier nombre penſé, & ôtez-en 5 pour deux nombres penſés, 55 pour trois nombres penſés 555, pour quatre nombres penſés, & ainſi de ſuite: alors la premiere figure du reſte, vers la gauche, ſera le premier nombre penſé; la ſuivante en allant vers la droite, ſera le ſecond nom-

bre pensé, & ainsi de suite jusqu'à la derniere figure vers la droite qui représentera le dernier nombre pensé.

Comme si l'on a pensé ces quatre nombres 3, 4, 6, 9, en ajoutant 1 au double 6 du premier nombre pensé, 3 & en multipliant la somme 7 par 5, on a 35, auquel ajoutant le second nombre pensé 4, on a 39, dont le double est 78, auquel ajoutant 1, & multipliant la somme 79 par 5, on a 395, auquel ajoutant le troisieme nombre pensé 6, on a 401, dont le double est 802, auquel ajoutant 1, & multipliant la somme 803 par 5, il vient 4015, auquel ajoutant le quatrieme mombre pensé 9, & ôtant la somme 4024 ce nombre 555, il reste 3469, dont les quatre figures sont les quatre nombres pensés.

IV.

On peut encore résoudre très-facilement le cas précédent par cette méthode. Ayant fait ôter 1 du double du premier nombre pensé, & ayant fait multiplier le reste par 5, faites ajouter au produit le second nombre pensé, & demandez la somme, s'il n'y a plus de nombres pensés, autrement faites ajouter 5 à cette somme, pour avoir une seconde somme; & ayant fait pareillement ôter 1 du double de cette seconde somme, faites aussi multiplier le reste par 5, & faites ajouter au produit le troisieme nombre pensé, & demandez la somme, s'il n'y a plus de nombres pensés; autrememt il faudra, comme auparavant, faire ajouter 5 à cette somme, pour avoir une autre somme; & ayant fait de la même façon ôter 1 du double de cette autre somme, faites encore multiplier le reste par 5, & faites ajouter au produit le qua-

trieme nombre pensé, & si ce quatrieme nombre est le dernier, demandez la somme, à laquelle si vous ajoutez 4, vous aurez une derniere somme, dont les figures représenteront comme auparavant les nombres pensés.

Comme dans la supposition que nous venons de faire de ces quatre nombres pensés 3, 4, 6, 9, en ôtant 1 du double 6 du premier nombre pensé 3, & multipliant le reste 5 par 5, on a 25, auquel ajoutant le second nombre pensé 4, on a cette somme 29, à laquelle si l'on ajoute 5 on a cette seconde somme 34, dont le double est 68, d'où ôtant 1, il reste 67, qui étant multiplié par 5, donne 335, auquel ajoutant le troisieme nombre pensé 6, on a cette somme 341, à laquelle ajoutant 5, on a cette autre somme 346, dont le double 692, étant diminué de 1, & le reste 691, étant multiplié par 5, on a 3455, auquel ajoutant le quatrieme nombre pensé 9, on a cette somme 3464, à laquelle ajoutant 5, on a cette derniere somme 3469, dont les quatre figures représentent les quatre nombres pensés.

PROBLEME XXII.

Une personne tenant dans une main un certain nombre pair de pistoles, & un nombre impair en l'autre main, deviner en quelle main est le nombre pair.

FAites multiplier le nombre de la main droite, par un nombre pair tel qu'il vous plaira, comme par 2, & le nombre de la main gauche par un nombre impair, aussi tel qu'il vous plaira, comme par 3; puis ayant fait ajouter ensemble les deux produits, faites prendre la moitié de leur somme.

Si cette moitié eſt juſte, en ſorte que la ſomme ſoit un nombre pair, vous connoîtrez que le nombre de la main droite, qui a été multiplié par un nombre pair, eſt impair, & par conſéquent que celui de la main gauche qui a été multiplié par un nombre impair, eſt pair. Il arrivera tout le contraire, lorſque la moitié de la ſomme ne ſera pas juſte, c'eſt-à-dire, quand cette ſomme ſera un nombre impair; car dans ce cas le nombre de la main droite, qui a été multiplié par un nombre pair, ſera pair, & celui de la main gauche, qui a été multiplié par un nombre impair, ſera auſſi impair.

Comme ſi dans la main droite il y a 9 piſtoles, & 8 en la gauche, en multipliant le nombre 9 de la droite par 2, & le nombre 8 de la gauche par 3, & ajoutant enſemble les deux produits 18, 24, on aura la ſomme 42, qui étant un nombre pair, fait connoître que le nombre impair 9, qui a été multiplié par le nombre pair 2, eſt en la main droite, & par conſéquent le nombre pair 8 dans la gauche.

Mais ſi dans la main droite il y a 10 piſtoles, & 7 en la gauche, en multipliant le nombre 10 de la droite par 2, & le nombre 7 de la gauche par 3, & en ajoutant enſemble les deux produits 20, 21, on aura leur ſomme 41, laquelle étant un nombre impair, fait connoître que le nombre pair 10, qui a été multiplié par le nombre pair 2, eſt en la main droite, & par conſéquent le nombre impair 7 dans la main gauche. C'eſt par le moyen de ce problême qu'on peut réſoudre la queſtion ſuivante.

REMARQUE.

On voit bien qu'au lieu des deux mains de la même personne, on peut supposer que deux personnes auront pris l'un le nombre pair des pistoles, & l'autre le nombre impair. On fera à l'égard de ces deux personnes ce qu'on a fait à l'égard des deux mains.

QUESTION.

Une personne tenant une piece d'or dans une main, & une piece d'argent en l'autre, trouver en quelle main est la piece d'or, & en quelle main est la piece d'argent.

APrès avoir dit qu'on donne secretement à l'or une certaine valeur, qui soit un nombre pair, comme 8, & à l'argent une certaine valeur qui soit un nombre impair, comme 5, faites multiplier le nombre de la main droite par un nombre pair quelconque, comme par 2, & le nombre de la main gauche par un nombre impair quelconque, comme par 3. Puis ayant fait ajouter ensemble les deux produits, demandez si leur somme est un nombre pair ou impair. Vous sçaurez que le nombre est pair, en demandant si on peut prendre la moitié; & qu'il est impair, si on vous répond qu'on n'en peut pas prendre la moitié. Si cette somme est un nombre impair, l'or sera dans la main droite, & l'argent dans la gauche; & tout au contraire, si elle est un nombre pair, l'or sera dans la main gauche, & l'argent en la droite.

PROBLEME XXIII.

Trouver deux nombres dont on connoît la raiſon & la différence.

I.

POur trouver deux nombres dont le premier ſoit au ſecond, par exemple, comme 5 eſt à 2, & dont la différence, ou l'excès du plus grand ſur le plus petit, ſoit, par exemple, 12; multipliez cette différence 12, par le plus petit terme 2 de la raiſon donnée, & diviſez le produit 24, par la différence 3 des deux termes 5, 2, de la même raiſon donnée; le quotient 8 ſera le plus petit des deux nombres qu'on cherche, auquel ajoutant la différence donnée 12, la ſomme 20 ſera le plus grand.

II.

Ou bien multipliez la différence donnée 12 par 5 le plus grand nombre de la raiſon donnée, & diviſez le produit 60 par la différence 3 des deux termes 5, 2, de la même raiſon donnée; le quotient 20 ſera le plus grand des deux nombres qu'on cherche, duquel ôtant la différence donnée 12, le reſte 8 ſera le plus petit, comme auparavant.

III.

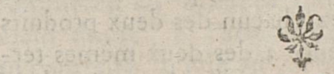
Ou bien encore multipliez chacun des deux termes 5, 2, de la raiſon donnée, par la différence donnée 12, & diviſez chacun des deux produits 60, 24, par la différence 3 des deux mêmes termes 5, 2; les quotiens 20, 8, ſeront les deux nombres qu'on cherche, comme auparavant. Par

le moyen de ce problême, on peut aisémenr résoudre la question suivante.

QUESTION.

Qaelqu'un ayant dans une main autant de pieces de monnoie que dans l'autre, deviner combien il y en a en chaque main.

FAites mettre quelques pieces de la main gauche dans la main droite, par exemple, deux, en sorte qu'il y ait quatre pieces plus dans la main droite que dans la gauche; & demandez la raison du nombre des pieces de la main droite au nombre des pieces de la main gauche, qui soit, par exemple, égale à celle de 5 à 3. Alors il faudra multiplier la différence 4 du nombre des pieces d'une main au nombre des pieces de l'autre, par le plus petit terme 3 de la raison donnée, & diviser le produit 12, par la différence 2 des deux termes 5, 3, de la même raison donnée, & le quotient 6 sera le nombre des pieces de la main gauche, auquel ajoutant la différence 4 des deux nombres des pieces qui sont en chaque main, on aura 10 pour le nombre des pieces de la main droite, auquel si l'on ajoute le nombre 6 des pieces de la main gauche, on aura 16 pieces en tout, dont la moitié 8 fait connoître qu'au commencement il y avoit 8 pieces de monnoie dans chaque main.



PROBLEME XXIV.

QUESTION I.

Une personne ayant pris autant de jettons, ou pieces de monnoie, dans une main que dans l'autre, deviner combien il y en a en tout.

DItes-lui de transporter de la main droite, par exemple, dans la gauche, un certain nombre de jettons, qui soit au-dessous de celui qu'il a dans l'une des mains. Dites-lui encore que de la main gauche, où il a mis ce nombre de jettons, il en transporte dans la droite autant qu'il y en étoit resté. Le nombre des jettons, qui sera dans la main gauche, sera double du nombre qu'on a ordonné d'y transporter. Si vous demandez donc de combien les jettons qui sont dans la main gauche, surpassent ceux qui sont dans la droite, vous connoîtrez combien il y a de jettons dans cette main droite, ainsi il n'y aura plus qu'à ajouter les jettons qui sont dans les deux mains, pour sçavoir combien il y en a en tout.

Si on avoit pris dans chaque main 12 jettons, & que vous en eussiez fait transporter 7 de la main droite dans la gauche, il faudroit faire passer de la main gauche dans la droite, autant qu'il en étoit resté dans cette main droite, c'est-à-dire, cinq jettons. Vous seriez assuré, pour lors, qu'il y auroit dans la main gauche, 14 jettons, qui est le double de 7, que vous aviez ordonné d'y transporter. Alors vous demanderez de combien le nombre des jettons de la main gauche est plus grand que celui de la main droite, on vous répondra qu'il y en a quatre de plus dans celle-ci que dans l'autre : ayant

donc ôté 4 de 14, il restera 10 que vous ajouterez à 14. La somme 24 est le total des jettons qu'on avoit pris.

I. REMARQUE.

Au lieu de demander de combien le nombre des jettons de la main gauche est plus grand que celui de la main droite, on peut demander de combien le nombre des jettons de la main gauche surpasse celui qu'on avoit pris au commencement, qu'on suppose être 12, ou de combien le nombre des jettons de la main droite est plus petit que celui qu'on avoit pris au commencement. Par ce moyen on connoîtroit que le nombre des jettons de la main droite étoit 10, qu'il faudroit ajouter à 14, pour avoir la somme 24.

II. REMARQUE.

On a donné dans le problême XVII plusieurs manieres de deviner un nombre que quelqu'un aura pensé, en voici encore une autre qu'on peut proposer sous ce titre.

Deviner combien une personne aura de jettons ou de pieces de monnoie dans la main.

FAites multiplier le nombre des jettons par 3, ce triple sera pair ou impair.

I.

Si ce triple est pair, il en faudra prendre la moitié, & faire encore multiplier cette moitié par 3 : ce second triple sera pair ou impair.

II.

Si ce second triple est pair, il en faut faire

prendre la moitié, puis demandez combien cette moitié contient de fois 9. Sçachant combien cette moitié contient de fois 9, vous prendrez autant de fois 4 qu'il y a de fois 9, sans vous embarrasser s'il y a du surplus; le produit sera le nombre des jettons qu'on tiendra dans la main.

Exemple où le premier & le second triple sont pairs.

Si on a pensé 8, ou qu'on ait pris 8 jettons, il faut faire multiplier 8 par 3, le produit est 24, qui est pair : faites prendre la moitié de 24, qui est 12, que vous ferez encore multiplier par 3. Ce second triple est 36, qui est aussi pair, sa moitié est 18. Demandez combien cette moitié 18, que vous ne sçavez point, contient de fois 9; on vous répondra qu'elle contient 2 fois 9 : prenez donc 2 fois 4, & vous aurez 8 pour le nombre des jettons.

III.

Si le second triple est impair, il y faut faire ajouter 1, & retenir 2 en vous-même; vous ferez prendre ensuite la moitié de ce triple augmenté de l'unité, vous demanderez combien cette moitié contient de fois 9; vous prendrez autant de fois 4, qu'elle contiendra de fois 9, sans vous embarrasser s'il y a du surplus. Mais vous vous souviendrez d'y ajouter le 2 que vous avez retenu, à cause du second triple impair; la somme sera le nombre pensé ou pris.

Exemple où le premier triple est pair, & le second est impair.

Si on a pris 6 jettons, vous ferez multiplier 6 par 3, le produit 18, est pair, dont la moitié est 9 : vous ferez aussi multiplier cette moitié 9 par

3, le produit est 27, auquel vous ferez ajouter 1, & l'on aura 28; mais vous retiendrez deux en vous-même. La moitié de 28 est 14, qui ne contient qu'une fois 9 : ainsi ayant sçu que cette moitié, qui vous est inconnue, contient une fois 9, vous prendrez une fois 4, & vous y ajouterez 2, que vous avez retenu, à cause du second triple impair, la somme 6 est le nombre des jettons qu'on a pris.

IV.

Si le premier triple est impair, vous y ferez ajouter 1, & retiendrez 1 en vous-même, pour l'ajouter à la fin, comme on le dira. Vous ferez prendre ensuite la moitié de ce triple augmenté de l'unité, & vous ferez encore tripler cette somme. Ce second triple sera pair ou impair.

V.

Si ce second triple est pair, vous en ferez prendre la moitié, & vous demanderez combien elle contient de fois 9 : puis vous prendrez autant de fois 4, qu'elle contiendra de 9, & vous augmenterez ce produit de l'unité, que vous avez retenu, à cause du premier triple impair, la somme sera le nombre pensé ou pris.

Exemple où le premier triple est impair, & le second est pair.

Si on a pris 5 jettons, vous ferez prendre le triple de 5 qui est 15; auquel vous ferez ajouter 1, parce qu'il est impair, la somme sera 16, dont la moitié est 8 : vous ferez multiplier cette moitié 8 par 3, le produit est 24, dont la moitié est 12, qui ne contient qu'une fois 9; ce que vous connoîtrez après l'avoir demandé. Ainsi vous pren-

drez une fois 4, auquel vous ajouterez 1, à cauſe du premier triple impair, & vous aurez 5, qui eſt le nombre pris.

VI.

Mais ſi le ſecond triple eſt impair, vous y ferez ajouter 1; vous ferez prendre enſuite la moitié de ce triple augmenté de l'unité, & vous retiendrez 2 en vous-même. Vous demanderez combien cette moitié contient de fois 9, vous prendrez autant de fois 4, quelle contiendra de fois 9, & vous y ajouterez 3, à cauſe de 1 retenu en premier lieu pour le premier triple impair, & de 2 retenu en ſecond lieu, pour le ſecond triple impair : la ſomme ſera le nombre pris.

Exemple où les deux triples ſont impairs.

Si on a pris 7 jettons, vous ferez multiplier 7 par 3, le triple ſera 21, que vous ferez augmenter de l'unité, à cauſe qu'il eſt impair, on aura 22, & vous retiendrez 1 en vous-même. Faites enſuite prendre la moitié de 22, qui eſt 11, que vous ferez encore multiplier par 3 : & l'on aura 33, qui eſt encore impair : ainſi vous retiendrez 2 en vous-même, à cauſe de ce ſecond triple impair, vous ferez augmenter 33 de l'unité, & l'on aura 34, dont la moitié eſt 17, qui ne contient qu'une fois 9. Ayant donc ſçu que cette moitié contient une fois 9, vous prendrez une fois 4, auquel vous ajouterez 3, ſomme de 1 retenu pour le premier triple, & de 2 retenu pour le ſecond triple : la ſomme 7 eſt le nombre des jettons.

VII.

Obſervez qu'en ſuivant cette méthode, 1°. Si

l'on a pensé 3, ou qu'on ait pris 3 jettons, vous ne trouverez que 1 retenu, à cause du premier triple impair, & 2 retenu à cause du second triple impair, dont la somme est 3 : c'est-à-dire, que si on a pris 3 jettons, les deux triples 9, 15, seront impairs, & que 8 moitié du second triple, ne contenant point 9, il suffit d'ajouter 1, retenu à cause du premier triple impair, & 2, retenu à cause du second triple impair; cette somme 3 sera le nombre cherché.

2°. Si l'on a pris deux jettons, le premier triple 6 sera pair, & le secomd 9 sera impair ; ainsi la moitié 5 du second triple, ne contenant point 9, vous ne ferez attention qu'au 2 retenu, à cause du second triple impair, qui sera par conséquent le nombre des jettons qu'on aura pris.

3°. Si l'on n'a pris qu'un jetton, le premier triple 3 sera impair, & le second 6 sera pair ; ainsi vous ne ferez attention qu'à 1, retenu à cause du premier triple impair, qui sera le nombre pris.

4°. Si l'on n'a point pris de jettons, il n'y a point de triple, & par conséquent rien à retenir ; il n'y a pas non plus de 9 ; on trouvera donc qu'on a pris 0, c'est-à-dire, rien.

VIII.

Au lieu de faire prendre la moitié du second triple, vous pouvez demander combien ce second triple contient de fois 9 : alors vous prendrez autant de fois 2, qu'on vous aura dit qu'il y a de fois 9 : & vous aurez soin d'ajouter 1 à ce produit, si le premier triple étant impair, vous avez fait ajouter 1.

Exemple.

Si on a pensé 11, ou qu'on ait pris 11 jettons,

faites multiplier 11 par trois, il viendra 33 ; ayant fait ajouter 1 à 33 pour avoir 34, vous retiendrez 1 en vous-même, puis vous ferez prendre la moitié de 34, qui est 17. Vous direz encore de multiplier ce 17 par 3, le produit sera 51. Enfin ayant sçu que 9 est 5 fois dans 51, vous prendrez 2 fois 5 qui font 10, auquel vous ajouterez 1, à cause du premier triple impair, & la somme 11 sera le nombre pensé, ou celui des jettons qu'on a pris.

IX.

Cette maniere de deviner un nombre pensé proposé dans ce dernier article VIII, est la même que celle qui a été proposée au probl. XVII, art. X. Lorsque le premier triple sera pair, on n'ajoutera rien à 2 pris autant de fois que le second triple contiendra de fois 9.

QUESTION II.

Une personne charitable sortant de sa maison, rencontre à sa porte un certain nombre de pauvres. Il veut leur distribuer l'argent qu'il a sur lui: donnant à chacun de ces pauvres neuf sols, il trouve qu'il lui manque trente-deux sols; mais leur distribuant à chacun sept sols, , il lui reste vingt-quatre sols. On demande combien il y avoit de pauvres, & combien cette personne avoit d'argent dans sa bourse.

IL faut ajouter 24 & 32, la somme sera 56, dont la moitié 28 est le nombre des pauvres. Si l'on multiplie 28, nombre des pauvres, par 7, nombre des sols qu'on leur a donné, & qu'au produit 196 on ajoute les 24 sols de surplus, on

aura 220 sols pour l'argent de la personne charitable.

REMARQUE.

On auroit encore eu la même somme 220 sols, si l'on avoit multiplié 28, nombre des pauvres, par 9, nombre des sols qu'on a voulu donner, & que du produit 252 on eût ôté les 32 sols qui manquoient.

QUESTION III.

De l'âne & du mulet.

Il arriva qu'un mulet & un âne faisant voyage ensemble, portoient chacun un certain nombre de barrils de vin. L'âne se plaignoit de ce qu'il étoit trop chargé. Le mulet lui dit : vous n'avez point raison de vous plaindre ; car si vous me donniez un de vos barrils, j'en aurois deux fois autant que vous, & si je vous en donnois un des miens, nous en porterions l'un autant que l'autre. Combien de barrils avoient ils chacun ?

LE mulet avoit sept barils de vin, & l'ân e
avoit cinq : l'âne donnant un baril au m e n
n'en auroit plus eu que quatre, & le mu ulet,
auroit eu huit, qui est le double de la cha let en
l'âne ; mais si le mulet avoit donné un de rge de
rils à l'âne : il en auroit encore eu 6, & ses ba-
auroit aussi eu six. l'âne en

REMARQUE.

On me permettra de mettre ici cette question avec sa solution en vers latins.

Unà

Unà cum mulo vinum portabat asella,
Atque suo graviter ceu pondere pressa gemebat.
Talibus at dictis mox increpat ille gementem :
Mater, quid luges teneræ de more puellæ ?
Dupla tuis, si des mensuram, pondera gesto ;
At sit mensuram capias, æqualia porto.

Dic mihi mensuras sapiens geometer istas,
Non aliter Phœbi nomine dignus eris.

Unam asina accipiens, amittens mulus & unam,
Si fiant æqui, certè utrique antè duobus
Distabant à se. Accipiat si mulus at unam,
Amittatque asina unam, tunc distantia fiet
Inter eos quatuor. Muli at cum pondera dupla
Sint asinæ ; huic simplex, mulo est distantia dupla :
Ergo habet hæc quatuor tantum, mulusque habet octo.
Unam asinæ si addas, si reddat mulus & unam,
Tunc ignota priùs tibi pondera clara patebunt.

SOLUTIO.

Mensuras quinque hæc, & septem mulus habebat.

On peut exprimer cette question en différentes manieres. En voici une en latin avec sa réponse.

Ova olim juvenes duo ferebant,
Horum sic comitem lacessit alter :
Unum si dederis mihi tuorum
Ovorum, numerus mihi tibique
Par erit : cui mox regessit alter ;
Tu si mî dederis unum tuorum,
Duplo plura ego bajulabo quàm tu.
Dic ergo tulerit quot ova uterque ?

SOLUTIO.

Tot prior ova tulit, lustrum quot continet annos.
Posterior vaga quot sidera mundus habet.

Ce que les deux jeunes gens viennent de dire touchant les œufs qu'ils portent, ou ce que l'on fait dire au mulet & à l'âne, se met dans la bouche de deux amis, qui se trouvent emsemble : l'un dit à l'autre, si je vous donnois une de mes pistoles, vous en auriez autant que moi : l'autre répond, & moi si je vous en donnois une des miennes, vous en auriez deux fois autant que moi. Il paroît que chacun sçait le nombres des pistoles de son ami. Mais il n'en est point de même de ceux à qui on propose cette question : il faut qu'ils le devinent.

QUESTION IV.

Les trois graces portant des couronnes de fleurs, rencontrerent les neufs muses, à qui elles présenterent chacune un nombre égal de couronnes. La distribution faite, il se trouva que les graces & les muses en avoient chacune autant l'une que l'autre. On demande combien les graces avoient de couronnes, & combien elles en donnerent.

LEs graces avoient chacune douze couronnes & chacune en donna une. On peut supposer encore qu'elles en avoient 24, & que chacune en donna deux ; ou bien qu'elles en avoient 36, & que chacune en donna trois, & ainsi de suite, pourvu qu'en prenant les multiples de 12, on augmente à proportion le nombre des couronnes qui seront présentées.

QUESTION V.

Trois personnes veulent acheter une maison 26000 livres : mais ils sont convenus que l'un donneroit la moitié de l'argent, l'autre le tiers, & le troisieme le quart. On demande combien ils doivent donner chacun.

CElui qui a promis la moitié de l'argent, doit donner 12000 livres : celui qui a promis le tiers doit donner 8000 livres, & celui qui a promis le quart doit donner 6000 livres. Ces trois sommes font ensemble 26000 livres.

QUESTION VI.

Un pere en mourant laisse sa femme enceinte : il ordonne par son testament que si elle accouche d'un garçon, il héritera des deux tiers de son bien, qui est 3000 écus, & l'autre tiers sera pour la mere ; mais si elle acouche d'une fille, cette fille n'héritera que d'un tiers, & les deux autres tiers seront pour la mere. Il arrive que la mere accouche d'un garçon & de deux filles. On demande quel doit être le bien de chacun.

LA part qui doit revenir au garçon est de 1500 écus, moitié du bien du pere ; celle qui reviendra à la mere est de 750 écus, & les filles auront chacune 375 écus. Ces quatre sommes font ensemble 3000 écus.

QUESTION VII.

On dit d'une personne qu'elle a passé le quart de sa vie en l'enfance, la cinquieme partie en la jeunesse,

le tiers en l'âge viril, & qu'il y a 13 ans qu'elle a commencé à entrer dans la vieillesse. On demande l'âge de cette personne.

IL est facile de répondre que cette personne a soixante ans, qu'elle a passé 15 ans dans l'enfance, 12 ans dans la jeunesse, 20 ans dans l'âge viril; qu'enfin à 47 ans elle a commencé à entrer dans la vieillesse.

QUESTION VIII.

Quarante-une personnes se sont trouvées à un repas; il y avoit des hommes, des femmes & des enfans. La dépense a été de 40 sols : les hommes ont payé 4 sols par tête, les femmes 3 sols chacune, & les enfans 4 deniers chacun. On demande le nombre des hommes, celui des femmes, & celui des enfans.

IL y avoit cinq hommes, trois femmes, & trente-trois enfans. Les cinq hommes ont payé 20 sols, les trois femmes ont payé 9 sols, & les trente-trois enfans ont payé 11 sols. Ces sommes font ensemble 40 sols; & le nombre des hommes, des femmes & des enfans, fait quarante-une personnes.

QUESTION IX.

Un lion de bronze, placé sur le bassin d'une fontaine, peut jetter l'eau par les yeux, par la gueule, & par le pied droit. S'il jette l'eau par l'œil droit, il emplira le bassin en deux jours : s'il la jette par l'œil gauche, il l'emplira en trois jours : s'il la jette par le pied, il l'emplira en quatre jours; enfin s'il la jette par la gueule, il l'emplira en six heures. On demande en combien de tems le bassin

sera rempli, si le lion jette l'eau en même tems par les yeux, par le pied, & par la gueule.

TOutes ces ouvertures laissant écouler l'eau en même tems, le bassin sera rempli en quatre heures, & environ quarante - quatre minutes. *Voyez la remarque de la question suivante.*

QUESTION X.

Trois imprimeurs veulent entreprendre l'impression d'un livre : l'un le peut imprimer en six mois ; l'autre ne le peut qu'en neuf mois ; & le troisieme moins diligent, où ayant moins d'ouvriers, ne le peut imprimer qu'en douze mois. On demande en combien de tems cet ouvrage sera imprimé, si on fait travailler les trois imprimeurs en même tems.

CEs imprimeurs trravaillant tous en même tems à différentes parties de ce livre, ils l'auront imprimé en deux mois vingt-trois jours & une heure ou environ.

REMARQUES.

L'un de ces imprimeurs fait en un mois la sixieme partie de l'ouvrage ; l'autre la neuvieme, & l'autre la douzieme : ces fractions ajoutées ensemble font $\frac{13}{36}$. Pour avoir le tems demandé, il faut faire une regle de trois, dont le premier terme sera 13, le second sera un mois, & le troisieme sera 36 : le quatrieme terme donnera le tems demandé, après avoir réduit les restes dans les parties des mois & des jours.

Il en eſt de même à l'égard de la queſtion précédente : mais il faut réduire les jours en heures, à cauſe des ſix heures dont il eſt parlé. L'œil droit du lion jettera en une heure un quarante-huitieme d'eau pour emplir le baſſin ; l'œil gauche en jettera un ſoixante - douzieme ; le pied droit en jettera un quatre-vingt-ſeizieme, & la gueule en jettera un ſixieme. Toutes ces fractions reduites en une ſeule, on fera une regle de trois, comme on vient de le dire, dont le premier terme ſera le numérateur, le ſecond une heure, & le troiſieme ſera le dénominateur. Il viendra au quatrieme terme 4 heures & environ 44 minutes.

PROBLEME XXV.

Deux perſonnes étant convenues de prendre à volonté des nombres moindres qu'un nombre propoſé, en continuant alternativement juſqu'à ce que tous leurs nombres faſſent enſemble un nombre déterminé plus grand que le propoſé : faire qu'on arrive le premier à ce nombre déterminé plus grand.

POur faire que le premier arrive, par exemple, à cent, en ſuppoſant qu'il lui eſt libre, auſſi-bien qu'au ſecond, de prendre alternativement un nombre tel qu'il voudra, pourvu qu'il ſoit moindre, par exemple, que 11, il faut qu'il ôte ce nombre 11 de 100, autant de fois qu'il pourra, & alors il reſtera ces nombres 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, dont il doit ſe ſouvenir, & prendre le premier 1 : ainſi quelque nombre que le ſecond prenne, il ne pourra pas empêcher le premier de parvenir au ſecond nombre 12 ; car ſi le ſecond prend, par exemple, 3, qui avec 1 fait 4, le pre-

mier n'a qu'à prendre 8, pour parvenir à 12 : après quoi, quelque nombre que prenne le second, il ne pourra pas empêcher que le premier ne parvienne au troisieme nombre 23 ; car s'il prend, par exemple, 1, qui avec 12 fait 13, le premier n'a qu'à prendre 10, avec 13 qui fait 23 ; ensuite quelque nombre que le second prenne, il ne pourra pas empêcher le premier de parvenir au quatrieme nombre 34, ensuite au cinquieme 45, puis au sixieme 56, de-là au septieme 67, de-là au huitieme 78, de-là au dernier 89, & enfin à 100.

Si le second vouloit gagner, il est évident qu'il devroit prendre au commencement un nombre qui fût le reste à 12 du nombre que le premier auroit pris, afin de pouvoir parvenir à 12 : comme si le premier avoit pris 2, le second devroit prendre 10 : mais si le premier sçait la finesse, il ne peut prendre que 1, & alors le second devroit prendre 15 ; ce qui ne se peut, parce qu'ils sont convenus prendre des nombres moindres que 11. Mais ces sortes de jeux ne se font ordinairement qu'avec ceux qui les ignorent. Ainsi si le second ne sçait pas la finesse du jeu, le premier qui veut gagner ne doit pas prendre toujours 1 au commencement, mais quelqu'autre nombre, après avoir gagné la premiere partie, en risquant de perdre la seconde, pour mieux cacher l'artifice.

Si le premier veut gagner, il ne faut pas que le plus petit nombre proposé mesure le plus grand : car dans ce cas le premier n'auroit pas une regle infaillible pour gagner. Par exemple, si au lieu de 11 on avoit pris 10 qui mesure 100, en ôtant 10 de cent, autant de fois qu'on le peut, on auroit ces nombres 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, dont le premier 10 ne pourroit pas être pris par le

premier ; ce qui fait qu'étant obligé de prendre un nombre moindre que 10, si le second étoit aussi fin que lui, il pourroit prendre le reste à 10, & ainsi il auroit une regle infaillible pour gagner.

Il n'est pas nécessaire d'ôter le plus petit nombre du plus grand, autant de fois qu'on le peut, pour sçavoir le nombre que le premier doit prendre pour gagner ; car il suffit de diviser le plus grand par le plus petit, & le reste de la division sera le nombre que le premier doit choisir au commencement. Comme dans l'exemple proposé en divisant 100 par 11, il reste 1 pour le premier nombre du premier, auquel s'il ajoute 11, il aura 12 pour son second nombre, auquel ajoutant encore 11, il aura 23 pour son troisieme nombre, & ainsi de suite jusqu'à 100.

PROBLEME XXVI.

Diviser un nombre donné en deux parties, dont la raison soit égale à celle de deux nombres donnés.

QU'il faille diviser le nombre donné 60, en deux autres nombres, tel que le plus petit soit au plus grand comme 1 est à 2, en sorte qu'une partie soit double de l'autre.

I.

Ajoutez ensemble les deux termes 1, 2, de la raison donnée ; divisez par leur somme 3, le nombre donné 60 ; le quotient 20 sera le plus petit des deux nombres qu'on cherche, lequel étant ôté du nombre donné 60, le reste 40 sera le plus grand nombre.

II.

Ou bien multipliez les deux termes 1, 2, de la rson donnée, chacun par le nombre donné 60, divisez les produits 60, 120, chacun par la somme 3 des deux mêmes termes 1, 2, & les deux quotiens 20, 40, seront les deux nombres qu'on cherche.

Ce problême est le même que la seconde question du livre premier de Diophante, & l'on peut aisément par son moyen résoudre les questions suivantes.

QUESTION I.

Faire la monnoie d'un écu blanc en deux especes différentes, en sorte qu'il y ait autant d'une espece que de l'autre.

COmme l'on cherche une solution en nombres entiers, il est aisé de connoître que cette question ne se peut pas résoudre généralement pour toutes sortes de monnoies. Afin que la question soit possible, il faut que la somme des deux termes qui expriment la raison des deux especes proposées, puisse diviser exactement la valeur d'un écu blanc, lorsqu'il sera réduit en la monnoie la plus basse.

Ainsi en faisant valoir 60 sols un écu blanc, ou 240 liards, on connoît qu'on en peut donner la monnoie en sols & en liards, parce que sa valeur 240 se peut diviser par la somme 5 des deux termes 1, 4, qui expriment la raison d'un liard à un sol, parce que quatre liards font un sol. Si donc on divise 240 liards par 5, on aura 48 liards, & par conséquent 48 sols, pour la solution de la

question. Car 48 sols avec 48 liards, qui valent 12 sols, font 60 sols, telle qu'est la valeur supposée d'un écu blanc.

On connoîtra de la même façon, qu'il faut 12 sols & 12 pieces de quatre sols pour faire un écu de 60 sols : parce que divisant 60 par 5, le quotient est 12 ; & qu'il faut 13 sols & 13 pieces de quatre sols pour faire un écu de 65 sols, parce que divisant 65 par 5, le quotient est 13.

De même, pour donner en sols & en pieces de quatre sols la monnoie d'un louis d'or, valant 11 livres, ou 220 sols, en sorte qu'il y ait autant de sols que de pieces de quatre sols, il faut 44 sols, & 44 pieces de quatre sols, parce que divisant 220 par 5, le quotient est 44 : & que pour donner dans les deux mêmes especes la monnoie d'un louis d'or valant 12 livres 5 sols, ou 245 sols, en sorte qu'il y ait autant d'une espece que de l'autre, il faut 49 sols & 49 pieces de quatre sols, parce que divisant 245, par 5, le quotient est 49.

Enfin l'on connoîtra que pour faire la monnoie en sols & en deniers d'un écu valant 65 sols, ou 780 deniers, en sorte qu'il y ait autant de sols que de deniers, il faut 60 sols & 60 deniers, parce que divisant 780 par 13, qui est la somme des deux termes 1, 12, qui exprime la raison d'un denier à un sol, parce qu'un sol contient 12 deniers, le quotient est 60. Ainsi des autres.



QUESTION II.

Un marchand de vin n'a que deux ſortes de vins, l'un à 10 ſols, & l'autre à 5 ſols la bouteille. On lui demande 30 bouteilles de vin à 8 ſols. Que doit-il faire pour mêler ces deux vins, de ſorte que la bouteille revienne à 8 ſols.

IL faut qu'il prenne les différences du prix de ſes vins au prix du vin demandé. Ces différences ſont 2, 3, qui ſeront les termes d'une raiſon donnée. La ſomme de ces différences eſt 5. Premierement pour trouver le nombre des bouteilles de vin à 5 ſols, qu'il doit prendre pour le mêlange, il faut, ſelon l'article II, qu'il multiplie 30, nombre des bouteilles demandées, par 2, différence de 10, prix de l'un de ces vins, & de 8, prix du vin demandé, & qu'il diviſe le produit 60, par 5, ſomme des différences : le quotient 12 eſt le nombre des bouteilles de vin à 5 ſols, qu'il prendra pour le mêlange. Secondement, pour trouver le nombre des bouteilles de vin à 10 ſols, qu'il doit prendre pour le mêlange, il faut, ſuivant le même article II, qu'il multiplie le même nombre 30 par 3, différence de 5, prix de l'autre de ſes vins, & de 8, prix des vins demandés, & qu'il diviſe le produit 90 par 5, ſomme des différences : le quotient 18 eſt le nombre des bouteilles de vin à 10 ſols, qu'il prendra pour le mêlange. Ainſi ayant mêlé 12 bouteilles de vin à 5 ſols, avec 18 bouteilles à 10, il en aura 30, qui reviendront à 8 ſols la bouteille. Ce qu'il eſt aiſé de reconnoître en multipliant 18 par 10, & 12 par 5, les deux produits 180, 60, ajoutés, ſont égaux à 240, produit de 30, par 8.

PROBLEME XXVII.

Trouver un nombre tel qu'étant diviſé ſéparément par des nombres donnés, il reſte par-tout 1; & étant diviſé par un autre nombre donné, il ne reſte rien.

I.

POur trouver un nombre tel qu'étant diviſé ſéparément par les deux nombres donnés, 5, 7, chaque reſte ſoit 1, & étant diviſé par ce troiſieme nombre donné 3, qui doit être premier avec les deux précédens, il ne reſte rien; multipliez enſemble les deux premiers nombres donnés, 5, 7, pour avoir leur produit 35, auquel ajoutant 1, on aura ce nombre 36, qui ſera tel qu'étant diviſé par 5 & par 6, il reſtera 1. Et comme il arrive que ce même nombre 36 étant diviſé par le troiſieme nombre donné 3, il ne reſte rien; il s'enſuit que 36 eſt le nombre qu'on cherche.

Mais on peut trouver une infinité d'autres nombres plus grands, qui ſatisferont aux conditions du problême; ce qui ſe fera par le moyen du premier & plus petit nombre trouvé 36, en cette ſorte.

Pour trouver un ſecond nombre, ajoutez le premier nombre trouvé 36, au produit 105 des trois nombres donnés 5, 7, 3, & la ſomme 141 ſera le ſecond nombre qu'on cherche, auquel ajoutant le produit précédent 105, on aura 246 pour troiſieme nombre, auquel ſi l'on ajoute le même produit 105, on aura 351 pour quatrieme nombre, & ainſi de ſuite.

II.

De même pour trouver un nombre tel qu'étant

divisé séparément par les trois nombres donnés 2, 3, 5, il reste 1, & étant divisé par ce quatrieme nombre donné 11, qui doit aussi être premier avec les trois précédens 2, 3, 5, il ne reste rien; multipliez ensemble les trois premiers nombres donnés 2, 3, 6, pour avoir leur produit 30, auquel ajoutant 1, on aura ce nombre 31, qui étant divisé par chacun des trois nombres donnés, 2, 3, 5, donnera pour reste 1. Si ce nombre 31, étant divisé par le quatrieme nombre donné 11, il ne reste rien, il seroit celui qu'on cherche; mais parce qu'il reste 9, le nombre 31 n'est pas celui qu'on cherche. Pour le trouver, voici ce qu'on fera.

Divisez 30 par 11, & ayant négligé le quotient 2, servez-vous du reste 8 en cette sorte. Cherchez au nombre 11, un multiple, qui surpasse de l'unité un multiple de 8. * Vous trouverez que 33, multiple de 11, surpasse de l'unité 32, multiple de 8. Divisez 32 par 8, reste trouvé, & vous aurez pour quotient 4, par lequel vous multiplierez le produit déja trouvé 30. Ce second produit 120, augmenté de l'unité, sera le nombre cherché : car 121 est exactement divisible par 11, & donne pour reste 1, étant divisé par 2, 3, 5. Par le moyen de ce nombre 121, on en pourra trouver autant qu'on voudra, en cette sorte.

Pour avoir un second nombre, ajoutez le premier nombre trouvé, 121 à 330, produit des qua-

* On ne peut faire cette recherche, qu'en essayant, ou, comme on dit, en tâtonnant. Mais comme il ne s'agit que des petits nombres, il n'est point difficile de trouver ces multiples. Il ne seroit pas nécessaire de chercher un multiple de 11, si on trouvoit un multiple de quatre, qui fût moindre de l'unité qu'un multiple de 11.

tre nombres donnés 2, 3, 5, 11, & la somme 451 sera le second nombre qu'on cherche, auquel ajoutant le produit précédent 330, on aura 781 pour troisieme nombre, auquel, si on ajoute pareillement le même produit 330, on aura 1111 pour quatrieme nombre, & ainsi de suite.

III.

On pourra par un semblable raisonnement trouver un nombre tel qu'étant divisé séparément par ces trois nombres donnés 3, 5, 7, il reste un autre nombre que l'unité, par exemple, 2, & étant divisé par ce quatrieme nombre donné 8, il ne reste rien. Multipliez ensemble les trois premiers nombres donnés, 3, 5, 7, divisez leur produit 105 par le quatrieme nombre donné 8, & négligeant le quotient, servez-vous du reste 1, auquel vous chercherez un multiple qui soit moindre que 8 de 2, * parce qu'il s'agit de trouver un nombre qui ait 2 pour reste. Ce multiple est 6, divisez-le par un, qui est le reste trouvé : le quotient est 6, par lequel vous multiplierez ce premier produit 105. Ce second produit 630, augmenté de 2, sera le nombre cherché : car 632 est exactement divisible par 8, & il donne 2 pour reste, si on le divise par 3, 5, 7. Ce même nombre 632 servira à en trouver autant d'autres qu'on voudra qui auront la même propriété, par une méthode semblable à la précédente, comme vous allez voir.

Pour trouver un second nombre plus grand, ajoutez le nombre trouvé 632 au produit 840

* Il n'est point nécessaire de chercher ici une multiple de 8, puisque 8 surpasse 6, multiple de 1, de 2.

des quatre nombres donnés, 3, 5, 7, 8, & la somme 1472 sera le second nombre qu'on cherche, auquel ajoutant le produit précédent 840, on aura 2312 pour le troisieme nombre, auquel si l'on ajoute encore le même produit 840, on aura 3152 pour le quatrieme nombre, & ainsi de suite.

IV.

De même, pour trouver un nombre tel qu'étant divisé par ces trois nombres donnés 3, 5, 7, il reste 2, & étant divisé par ce quatrieme nombre donné 11, il ne reste rien; divisez le produit 105 des trois premiers nombres donnés 3, 5, 7, par le quatrieme 11, & négligeant le quotient, servez-vous du reste 6, pour l'usage que je vais indiquer. Cherchez un multiple de 11, qui surpasse de 2 un multiple de 6. * Vous trouverez 44, multiple de 11, & 42 multiple de 6. Divisez 42 par le reste 6 trouvé, le quotient sera 7, par lequel vous multiplierez le premier produit 105. Ce second produit 735, augmenté de 2, sera le nombre cherché. Car 737 est divisible sans reste par 11, & si on le divise par ces nombres, 3, 5, 7, séparément, il reste 1.

* Voyez la note de la page 189.

Par le moyen de ce nombre 737, on en pourra trouver autant d'autres qu'on voudra, en y ajoutant 1155, produit des nombres 3, 5, 7, 11, comme on l'a enseigné dans les exemples précédens.

V.

De même, pour trouver un nombre tel qu'étant divisé par 5, ou par 7, ou par 8, il reste 3, & étant divisé par 11, il ne reste rien, on multipliera ensemble ces trois nombres 5, 7, 8, dont on

divisera le produit 280 par 11, pour avoir le reste 5, en négligeant le quotient. On cherchera ensuite un multiple de 11, qui surpasse de 3 un multiple de 5. On trouvera 33, multiple de 11, & 30, multiple de 5 : puis on divisera 30 par 5, & l'on aura pour quotient 6, par lequel on multipliera le premier produit 280. Ce second produit 1680, augmenté de 3, sera le nombre cherché. Car 1683 se divise exactement par 11, & donne 3 pour reste, étant divisé par les nombres proposés 5, 7, 8.

C'est par le moyen de ce problême qu'on peut résoudre la question suivante.

QUESTION.

Trouver combien il y avoit de louis d'or dans une bourse qu'une personne dit avoir perdue, & qui assure qu'en les comptant deux à deux, ou trois à trois, ou cinq à cinq, il en restoit toujours un, & qu'en les comptant sept à sept, il n'en restoit point.

IL s'agit ici de trouver un nombre tel qu'étant divisé par celui qu'on voudra des trois nombres donnés 2, 3, 5, il reste 1, & étant divisé par le quatrieme nombre donné 7, il ne reste rien ; car ce nombre sera celui des louis d'or qui étoient dans la bourse. Et comme il y a plusieurs nombres qui peuvent satisfaire à la question, comme on a vu au problême précédent, on pourra juger par la grosseur, ou par la pesanteur de la bourse, du nombre des louis d'or qu'elle pouvoit contenir.

Mais pour trouver le moindre de tous ces nombres, cherchons premierement un nombre qui soit

exactement

exactement divisible par 2, par 3, & par 5, & qui étant augmentée de 1, soit aussi exactement divisible par 7. Si on multiplie ensemble les trois premiers nombres donnés 2, 3, 5, leur produit 30 sera divisible par chacun de ces trois nombres; mais en y ajoutant 1, la somme 31 n'est pas divisible par le quatrieme nombre donné 7; car il reste 3. Divisez donc 30 par le quatrieme nombre proposé 7; la division donnera 2 pour reste, & vous négligerez le quotient. Prenez 6 multiple de 2, qui est moindre que 7 de l'unité. * Divisez-le par 2, reste trouvé, & vous aurez 3 pour quotient, par lequel vous multiplierez le premier produit 30. Ce second produit 90, augmenté de 1, sera le premier nombre cherché; car 91 se divise sans reste par 7, & donne 1 pour reste, s'il est divisé par les nombres proposés 2, 3, 5.

* Voyez la note de la page 189.

Pour trouver un second nombre plus grand, qui satisfasse à la question, multipliez ensemble les quatre nombres donnés, 2, 3, 5, 7, ajoutez à leur produit 210 le premier & plus petit nombre trouvé 91, la somme 301 sera le second nombre qu'on cherche; auquel si l'on ajoute le produit précédent 210, la somme 511 sera un troisieme nombre qui satisfera; auquel pareillement si l'on ajoute le même produit 210, la somme 721, sera un quatrieme nombre qui satisfera, & ainsi à l'infini.

Ainsi pour la résolution de la question, l'on peut dire que dans la bourse perdue, il pouvoit y avoir 91 louis d'or, ou bien 301, ou bien 511, , ou bien encore 721; & c'est selon la grosseur de la bourse comme nous avons déja dit, qu'il en faut juger.

I. *REMARQUE.*

On peut proposer cette question d'une autre

maniere. Une pauvre femme porte au marché un paniers d'œufs; mais venant à être heurtée, elle laisse tomber son panier, & tous les œufs sont cassés. Celui qui a causé ce malheur veut payer les œufs; il demande à la femme combien elle avoit d'œufs dans son panier : elle lui répond qu'il y en avoit environ trois cens; que les comptant deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, six à six, il restoit toujours 1, & les comptant sept à sept, il ne restoit rien.

La question est ici déterminée par la condition que la femme a mise, en disant qu'il y avoit environ 300 œufs. Ainsi le nombre 301 sera le nombre des œufs. Si la condition n'y avoit point été mise, il en auroit fallu juger par la grandeur du panier. Mais on en jugera plus sûrement en demandant à la femme à peu près le nombre, comme de 300, ou de 500, ou de 700, &c. Alors, selon sa réponse, on choisit celui des nombres qui approche le plus de celui qu'elle a répondu.

II. *REMARQUE.*

Peut-être ne trouvera-t-on pas mauvais qu'on mette ici la solution du premier article de ce problême par algebre; on suivra la méthode que M. de Lagny, de l'académie royale des sciences, a indiqué dans ses nouveaux élémens d'arithmétique & d'algebre, p. 430. Elle peut être d'un grand secours dans les problêmes indéterminés.

I.

Il s'agit de trouver un nombre x tel qu'étant divisé par 3, il ne reste rien; étant divisé par 5,

il reste 1, & étant divisé par 7, il reste encore 1. La question proposée se réduira à ces équations. 1°. $\frac{x}{3}=p$. 2°. $\frac{x-1}{y}=n$.

Je choisis les deux premieres équations pour les comparer l'une à l'autre, & je les réduis à cette expression. 4°. $x=3p=5m+1$: par conséquent $p=\frac{5m+1}{3}$ où m est indéterminé : pour le trouver, voici le raisonnement que je fais.

Puisque $5m+1$ doit être divisé exactement par 3, toutes les différences de $5m+1$ à 3, son dénominateur, ou, ce qui est la même chose, à $3m$, doivent être aussi divisées par 3. Ainsi pour trouver la derniere différence, où m demeure seule, j'ôte autant de fois qu'il est possible $3m$ de $5m+1$: la premiere différence est $2m+1$, & j'ai $\frac{2m+1}{3}$: mais m n'étant point seule, cette expression ne convient pas : j'ôte donc $2m+1$ de $3m$, son dénominateur, & j'ai $m-1$, qui étant divisé par 3, donne ce rapport $\frac{m-1}{3}$.

Pour trouver la valeur de m, qui est indéterminé, je suppose, 1°. $\frac{m-1}{3}=0$, qui donne $m=1$. 2°. $\frac{m-1}{3}=1$, qui donne $m=4$. 3°. $\frac{m-1}{3}=2$, qui donne $m=7$, &c. $m=1$ ne pouvant satisfaire aux équations comparées, je prends $m=4$, qui donne la solution des équations comparées dans la quatrieme expression $x=3p=5m+1$: car $x=21$, qui étant divisé par 3, n'a point de reste, & étant divisé par 5, donne 1 pour reste.

Mais si je substitue 21, dans la troisieme supposition $\frac{x-1}{7}$, je trouve que $\frac{21-1}{7}$, ne donne point au quotient un nombre qui ait 1 pour reste. Je

cherche donc une autre valeur de m dans toutes celles qu'on peut trouver, & j'essaie celle qui peut convenir : pour la trouver plus sûrement, voici encore le raisonnement que je fais.

Puisque dans la recherche que j'ai fait de la valeur de m, par cette expression $\frac{m-1}{3}$, j'ai supposé que $\frac{m-1}{3}$, étoit égal à un nombre pris à volonté, tel que 0, 1, 2, 3, 4, &c. Je suppose qu'un de ces nombres pris à volonté & indéterminé, soit égal à f, ainsi j'aurai $\frac{m-1}{3} = f$, d'où l'on aura $m = 3f + 1$. Substituant donc ce $3f + 1$ dans la quatrieme équation $x = 5m + 1$, je trouverai $5m + 1 = 15 + f5 + 1 = x$. Ainsi dans la troisieme équation $\frac{x-1}{7} = n$, je substitue $15f + 6$, au lieu de x, ce qui me donne $\frac{15f+5}{7}$. J'ôte $7f$ autant de fois que je le puis de $15f + 5$, pour avoir la derniere différence $f + 5$, qui étant divisée par 7, donne $\frac{f+5}{7}$.

Ainsi pour avoir la valeur de f, je suppose, 1°. $\frac{f+5}{7} = 0$, qui donne $f = -5$, qui ne peut convenir. 2°. $\frac{f+5}{7} = 1$, qui domme $f = 7 - 5 = 2$, & cette valeur de f donne la solution des trois équations proposées. Car substituant 2 à la place de f, dans cette équation $m = 3f + 1$, j'aurai $m = 7$ & $x = 5m + 1 = 36$, qui est le nombre cherché.

On trouvera d'autres nombres que 36, si on suppose $\frac{f+5}{7}$ égal à 2, à 3, à 4, &c.



II.

Si j'avois comparé ensemble la troisieme & la seconde équation $\frac{x-1}{7} = n$ & $\frac{x-1}{5} = m$, j'aurois eu $x = 7n + 1 = 5m + 1$, & $n = \frac{5-m}{7}$, & l'on auroit vu que m doit être égal à 7, ou à un multiple de 7. Car si l'on ôte $5m$ de $7m$, on aura pour premier reste $2m$, dont le double $4m$ étant ôté de $5m$, donnera m : par conséquent on aura $\frac{m}{7}$. Si on fait $\frac{m}{7} = 1$, on aura $m = 7$. Si l'on fait encore $\frac{m}{7} = 2$, on aura $m = 14$, &c. $m = 7$ satisfait à la question : car $x = 5m + 1 = 36$. $m = 14$ y satisfait aussi, & donne un autre nombre que 36 ; & ainsi de suite à l'infini.

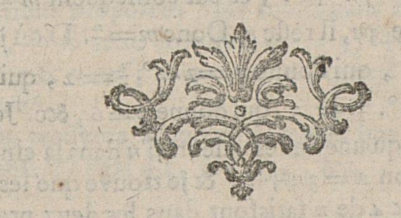
III.

Si l'on avoit proposé un plus grand nombre d'équations, comme, 1°. $\frac{x-1}{2} = m$. 2°. $\frac{x-1}{3} = n$. 3°. $\frac{x-1}{5} = p$. 4°. $\frac{x}{11} = q$. On auroit fait 5°. $x = 2m + 1 = 3n + 1$, & par conséquent $m = \frac{3n}{2}$. J'ôte $2n$ de $3n$, il reste n. Donc $m = \frac{n}{2}$. D'où je fais 1°. $\frac{n}{2} = 1$, qui donne $n = 2$. 2°. $\frac{n}{2} = 2$, qui donne $= 4$. 3°. $\frac{n}{2} = 3$, qui donne $n = 6$, &c. Je substitue quelqu'une de ces valeurs d'n dans la cinquieme équation $x = 3n + 1$, & je trouve que les deux valeurs 2 & 4 de n satisfont dans les deux premieres équations comparées ; mais elles ne satisfont point dans la troisieme question $\frac{x-1}{2} = p$.

C'estpourquoi je prens $n = 2f$, que je substitue dans la cinquieme équation $x = 3n + 1$, & j'ai,

6°. $x = 6f + 1$, qui étant substitué dans $\frac{x-1}{5}$, troisieme expression, donne $\frac{6f}{5}$, & ôtant $5f$ de $6f$, il restera f qui divisé par 5, donnera $\frac{f}{5}$, & par conséquent 1°, $\frac{f}{5} = 1$, qui donne $f = 5$. 2°. $\frac{f}{5} = 2$ qui donne $f = 10$, &c. La premiere valeur 5 de f substituée dans la sixieme expression $x = 6f + 1$, donne la solution des trois premieres équations ; mais elle ne donne point la solution de la quatrieme $\frac{x}{11}$. Car $31 = x$ ne peut être exactement divisé par 11.

Je fais donc $f = 5g$, que je mets à la place de f dans la sixieme équation $x = f + 1$, ce qui donne 7 $x = 30g + 1$, que je substitue dans la quatrieme équation $\frac{x}{11}$, & j'ai $\frac{30g+1}{11}$. J'ôte $30g + 1$ de $33g$ multiple de $11g$, il reste $3g - 1$. J'ôte $3g - 1$, ou son multiple $9g + 3$, de $11g$, puis le reste $2g + 3$ de $3g - 1$, je trouve pour dernier reste $g - 4$. Faisant $\frac{g-4}{11} = 0$, on a $g = 4$, qui donne la solution de la septieme équation $x = 30g + 1 = 121$, qui convient aux quatre équations proposées.



PROBLEME XXVIII.

Diviser plusieurs nombres donnés chacun en deux parties, & trouver deux nombres, en sorte que multipliant la premiere partie de chacun des nombres donnés par le premier nombre trouvé, & la seconde par le second, la somme des deux produits soit par-tout la même.

SI on donne, par exemple, ces trois nombres 10, 25, 30, & qu'on veuille avoir une solution en nombres entiers, prenez pour les deux nombres qu'on cherche, deux nombres quelconques, pourvu que leur différence soit 1, ou telle qu'elle puisse diviser exactement le produit sous le plus grand de ces deux nombres, & la différence de deux quelconques des trois nombres donnés, & que le plus grand de ces deux nombres, multiplié par le plus petit nombre donné 10, surpasse le plus petit des deux mêmes nombres, multiplié par le plus grand nombre donné 30.

Choisissez, par exemple, 2 & 7; leur différence 5, mesure exactement 105, produit de 7, grand nombre choisi, & de 15, différence de 25 & de 10. De plus, 70 produit de 7, grand nombre choisi, par 10, le plus petit nombre donné, surpasse 60, produit du plus grand nombre donné, par 2, petit nombre choisi.

Ayant donc trouvé les deux nombres qu'on cherche, 2, 7, la premiere partie du premier nombre donné 10, se pourra prendre à volonté, pourvu qu'elle soit moindre que le nombre donné 10, & que le nombre 10, qui reste en ôtant 60, produit de 2, petit nombre trouvé, par le plus grand donné

30 de 70, produit de 7, grand nombre trouvé, par le plus petit nombre donné 10. Cette premiere partie doit être aussi moindre que 2, quotient de ce reste 10, divisé par 5, différence des deux nombres choisis 2, 7. Elle sera donc 1, que l'on ôtera du premier nombre donné 10; le reste 9 sera l'autre partie, laquelle étant multipliée par le second nombre trouvé 7, & la premiere 1 étant multipliée par le premier nombre trouvé 2, la somme des deux produits 63, 2, est 65.

Pour trouver la premiere partie du second nombre donné, 25, multipliez la différence 15 des deux premiers nombres donnés 10, 25, par le plus grand nombre trouvé 7, & ayant divisé le produit 105, par la différence 5, des deux nombres trouvés 2, 7, ajoutez le quotient 21 à la premiere partie trouvée 1, du premier nombre donné 10, & la somme 22 sera la premiere partie du second nombre donné 25; c'est pourquoi l'autre partie sera 3, laquelle étant multipliée par le second nombre trouvé 7, & la premiere 22, par le premier 2, la somme des deux produits 21, 44, fait aussi 65.

Enfin pour trouver la premiere partie du troisieme nombre donné 30, multipliez la différence 5 des deux derniers nombres donnés 25, 30, par le plus grand nombre trouvé 7, & ayant divisé le produit 35, par la différence 5 des deux nombres trouvés 2, 7, ajoutez le quotient 7, à la premiere partie 22 du second nombre donné 30, & la somme 29 sera la premiere partie du troisieme nombre donné 30: c'est pourquoi l'autre partie sera 1, laquelle étant multipliée par le second nombre trouvé 7, & la premiere 29, par le premier 2, la somme des deux produits 7, 58, fait aussi 65.

Ou bien multipliez la différence 20 du premier & du troisieme nombre donné, par le plus grand nombre trouvé 7, & ayant divisé le produit 140 par la différence 5 des deux nombres trouvés 2, 7, ajoutez le quotient 28 à la premiere partie 1, du premier nombre donné 10, & vous aurez 29, comme auparavant, pour la premiere partie du troisieme nombre donné 30.

Si l'on prend 1, 6, pour les deux nombres qu'on cherche, & 4 pour la premiere partie du premier nombre donné 10, auquel cas l'autre partie sera 6, qui étant multiplié par le second nombre trouvé 6, & la premiere 4, par le premier 1, la somme des deux produits 36, 4, est 40; la premiere partie du second nombre donné 25, sera 22, & l'autre partie par conséquent sera 3, qui étant multipliée par le second nombre trouvé 6, & la premiere 22, par le premier 1, la somme des deux produits 18, 22, est aussi 40; enfin la premiere partie du troisieme nombre donné 30 sera 28; ce qui fait que l'autre partie sera 2, qui étant multipliée par le second nombre trouvé 6, & la premiere 28 par le premier 1, la somme des deux produits 12, 28, est aussi 40. Ce problême sert à résoudre la question suivante.

QUESTION I.

Une femme a vendu 10 pommes au marché à un certain prix, une autre femme en a vendu 25 au même prix, & une troisieme femme en a vendu 30 aussi au même prix, & chacune a rapporté une même somme d'argent. On demande comment cela se peut faire.

IL est évident qu'afin que la question soit possible, il faut que les femmes vendent leurs pom-

mes à deux diverses fois, & à divers prix, bien qu'a chaque fois elles vendent chacune à un même prix. Si ces deux prix différens sont 2, 7, qui sont

	Pom.		*Den.*	*Pom.*		*Den.*	
10.	1	*à*	2.	9	*à*	7	
25.	22	*à*	2	3	*à*	7	65
30.	29	*à*	2	1	*à*	7	

les deux nombres que nous avons trouvés au problême précédent; & si l'on suppose que la premiere fois elles vendent 2 deniers la pomme, & qu'à ce prix, la premiere vende 1 pomme, la seconde 22, & la troisieme 29, les trois nombres 1, 22, 29, seront les premieres parties des trois nombres donnés, 10, 25, 30, comme elles ont été trouvées au problême précédent. Dans ce cas la premiere femme aura 2 deniers, la seconde en aura 44, & la troisieme en aura 58. Ensuite, si on suppose qu'elles vendent le reste de leurs pommes 7 deniers la pomme, alors la premiere femme aura 63 deniers pour neuf pommes qui lui restent, la seconde aura 21 deniers pour trois pommes qui lui restent, & la troisieme aura 7 deniers pour 1 pomme qui lui reste; de sorte que chacune aura en tout 65 deniers.

Ou bien si les deux prix différens sont 1, 6, qui sont deux autres nombres que nous avons trouvés au problême précédent, & si l'on suppose que la premiere fois elles vendent 1 denier la pomme, & qu'à ce prix la premiere vende 4 pommes, la seconde 22, & la troisieme 28, ces trois nombres 4, 22, 28, seront les premieres parties des trois nombres donnés 10, 25, 30, comme elles ont été trouvées au problême précédent. Dans ce cas la

premiere femme aura 4 deniers, la seconde en aura

	Pom.		Den.	Pom.		Den.	
10.	4	*à*	1	6	*à*	6	}
25.	22	*à*	1	3	*à*	6	} 40
30.	28	*à*	1	2	*à*	6	}

22, & la troisieme en aura 28. Ensuite si on suppose qu'elles vendent le reste de leurs pommes 6 deniers la pomme, alors la premiere femme aura 36 deniers pour 6 pommes qui lui restent, la seconde aura 18 deniers pour 3 pommes qui lui restent, & la troisieme aura 12 deniers pour 2 pommes qui lui restent; de sorte que chacune aura en tout 40 deniers.

REMARQUES.

I.

Ceux qui voudront être instruits plus à fond sur la solution de ces sortes de questions, pourront consulter ce qui en est dit dans la seconde partie de l'arithmétique universelle, p. 456. On y traite en particulier celle qui est ici proposée; on dit qu'elle a seulement 6 solutions, & que la plus grande somme est 65. Je vais entreprendre de la résoudre par l'algebre, pour faire voir la fécondité de l'analyse, qui renferme des richesses qu'on tire de son sein, quand on est assez heureux pour la traiter avec ménagement. Je rapporterai dix solutions différentes de cette même question; les sommes de chaque femme seront, après chacune des dix ventes, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70. J'espere que cela fera plaisir à ceux qui commencent à apprendre l'algebre, & je crois que ce sera pour eux une récréation.

II.

Il faut se souvenir que trois femmes ayant porté des pommes au marché, l'une en a vendu 10, l'autre 25, & la troisieme 30, à un même prix ; & qu'étant revenues du marché, elles ont rapporté toutes trois une même somme. On se souviendra encore qu'elle doivent avoir vendu à deux différentes reprises, & à divers prix chaque fois.

J'appelle u le prix auquel les trois femmes ont vendu leurs pommes dans la premiere vente, & p le prix auquel elles ont vendu le reste dans la seconde vente.

Je nomme x le nombre des pommes de la premiere femme, vendues au prix u; par conséquent le reste de ses pommes vendues dans la seconde vente au prix p, sera $10-x$. Ainsi l'argent de la premiere vente sera xu, & celui de la seconde vente sera $10p-px$: la somme est $xu+10p-px$.

Je nomme z le nombre des pommes vendues au prix u par la seconde femme : par conséquent le reste de ses pommes vendues dans la seconde vente au prix p, sera $25z$. Ainsi l'argent de la premiere vente sera zu, & celui de la seconde vente sera $25p-pz$: la somme est $zu+25p-pz$.

Enfin je nomme y le nombre des pommes vendues par la troisieme femme au prix u; par conséquent le reste de ses pommes vendues dans la seconde vente au prix p, sera $30-y$. Ainsi l'argent de la premiere vente sera yu, & celui de la seconde vente sera $30p-py$: la somme de cette troisieme femme est $yu+30p-py$.

Je rassemblerai dans cette table tous ces différens prix : ceux qui sont à gauche marquent les prix des pommes vendues par les trois femmes

dans la premiere vente, & ceux qui sont à droite marquent les prix des pommes vendues dans la seconde vente.

	1e vente.	2e vente.
1e femme.	xu	$10p-px$
2e femme.	zu	$25p-pz$
3e femme.	yu	$30p-py$

La somme que rapporte la premiere femme est $xu+10p-px$.

La somme que rapporte la seconde femme est $zu+25p-pz$.

La somme que rapporte la troisieme femme est $yu+30p-py$.

Ces 3 sommes doivent être égales, c'est-à-dire, que $xu+10p-px=zu+25p-pz=yu+30p-py$. D'où je tire ces équations, 1°. en comparant les deux 1res sommes $xu+10p-px=zu+25p-pz$; d'où l'on a $xu-px=zu-pz+15p$, & divisant tout par $u-p$, on trouve $x=z+\frac{15p}{u-p}$. 2° En comparant la premiere & la troisieme somme $xu+10p-px=yu+30p-py$, d'où l'on a $xu-px=yu-py+20p$, & divisant encore tout par $u-p$, on a $x=y+\frac{20p}{u-p}$. 3°. En comparant la seconde & la troisieme somme $zu+25p-pz=yu+30p-py$, d'où l'on a $zu-pz=yu-py+5p$, & divisant tout par $u-p$, on a $z=y+\frac{5p}{u-p}$.

On voit dans ces trois équations que la différence de u à p $(u-p)$ doit être un diviseur exact de 15, de 20, & de 5, c'est-à-dire, des différences des nombres des pommes portées au marché. Mais pour parvenir avec quelque certitude à la valeur

de $n-p$, je choiſis la fraction $\frac{5p}{u-p}$, où ſe trouve le plus petit numérateur 5, qui eſt un diviſeur commun des trois différences, & je fais d'abord $\frac{5p}{u-p} = 0$, qui donnant $5p = 0$, n'eſt d'aucune utilité. Je fais enſuite $\frac{5p}{u-p} = 1$, qui donne $5p = u - p$, ou $6p = u$, & faiſant $p = 1$, j'ai $6 = u$. Ces valeurs d'u & de p, ſerviront pour les ſept premieres réſolutions qu'on va donner. Ainſi au lieu des trois équations que je viens de trouver, j'aurai ces trois autres. 1°. $x = z + 3$. 2°. $x = y + 4$. 3°. $z = y + 1$, qui ſont encore indéterminées : mais on n'a beſoin que de la derniere & de l'une des deux premieres.

Premiere ſolution.

Pour déterminer la valeur des inconnues x, z, y, je ſuppoſe $y = 0$ donc $z = 1$ par la troiſieme équation, & $x = 4$, par la premiere ou ſeconde équation. Ayant donc auſſi ſuppoſé $p = 1$ & $u = 6$; comme on vient de voir, la ſomme que chaque femme rapportera, ſera 30 deniers.

$$\text{Sommes.}\begin{cases} 1^e \text{ Fem. } xu + 10p - px = 24 + 10 - 4 = 30. \\ 2^e \text{ Fem. } zu + 25p - pz = 6 + 25 - 1 = 30. \\ 3^e \text{ Fem. } yu + 30p - py = 0 + 30 - 0 = 30. \end{cases}$$

Obſervation.

En conſidérant la table qu'on a mis ci-deſſus, on remarquera que la premiere femme doit vendre 4 pommes à 6 deniers dans la premiere vente, & par conſéquent 6 pommes à un denier dans la deuxieme vente; que la ſeconde femme doit vendre 1 pomme à 6 deniers dans la premiere vente, & 24 pommes à 1 denier dans la deuxieme vente;

que la troisieme femme ne doit vendre aucune pomme dans la premiere vente, & qu'elle les vendra toutes 30 à 1 denier dans la deuxieme vente; ce qui fait que chacune doit rapporter 30 deniers du marché. On appliquera cette observation aux solutions suivantes.

Seconde solution.

Je suppose $y=1$, par conséquent $z=2$ (troisieme équation (& $x=5$ (premiere & seconde équation.) $u=6$ & $p=1$.

Sommes.
- 1e. Fem. $xu+10px \quad =30+10-5=35$.
- 2e. Fem. $zu+25p-pz=12+25-2=35$.
- 3e. Fem. $yu+30p-py= \ 6+30-1=35$.

Troisieme solution.

Je suppose $y=2$. Donc $z=3$, & $x=6$, $u=6$. $p=1$.

Sommes.
- 1e Fem. $xu+10p-px=36+10-6=40$.
- 2e Fem. $zu+25p-pz=18+25-3=40$.
- 3e Fem. $yu+30p-py=12+30-2=40$.

Quatrieme solution.

Je suppose $y=3$, par conséquent $z=4$ & $x=7$. $u=6$. $p=1$.

Sommes.
- 1e. Fem. $xu+10p-px=42+10-7=45$.
- 2e. Fem. $zu+25p-pz=24+25-4=45$.
- 3e. Fem. $yu+30p-py=18+30-3=45$.

Cinquieme ſolution.

Je ſuppoſe $y=4$. donc $z=5$, & $x=8$, $u=6$. $p=1$.

Sommes.
- 1e. Fem. $xu+10p-px=48+10-8=50$.
- 2e. Fem. $zu+25p-pz=30+25-5=50$.
- 3e. Fem. $yu+30p-py=24+30-4=50$.

Sixieme ſolution.

Je ſuppoſe $y=5$, par conſéquent $z=6$, & $x=9$. $u=6$. $p=1$.

Sommes.
- 1e. Fem. $xu+10p-px=54+10-9=55$.
- 2e. Fem. $zu+25p-pz=36+25-6=55$.
- 3e. Fem. $yu+30p-py=30+30-5=55$.

Septieme ſolution.

Je ſuppoſe $y=6$, donc $z=7$, & $x=10$. $u=6$. $p=1$.

Sommes.
- 1e. Fem. $xu+10p-px=60+10-10=60$.
- 2e. Fem. $zu+25p-pz=42+25-7=60$.
- 3e. Fem. $yu+30p-py=36+30-6=60$.

On voit par cette ſolution que la premiere femme vend toutes ſes pommes dans la premiere vente.

III.

Je ne puis plus ſuppoſer une plus grande valeur à y, parce qu'il en viendroit à x une qui ſeroit plus grande que 10, c'eſt-à dire, que la premiere femme ſeroit obligée de vendre plus de pommes qu'elles

qu'elle n'a ; ce qui eſt contre la ſuppoſition. D'où il ſuit qu'il faut chercher à u & à p une autre valeur que celle qu'on leur a donnée dans les ſolutions précédentes. Ainſi je fais $\frac{5p}{u-p} = 2$, d'où il vient $5p = 2u - 2p$, ou $7p = 2u$; faiſant $p = 2$, on aura $u = 7$. Ces valeurs trouvées, on les ſubſtituera dans les comparaiſons $x = z + \frac{15p}{u-p}$. $x = y + \frac{20p}{u-p}$. $z = y + \frac{5p}{u-p}$, & l'on aura, 1°, $x = z + 6$. 2°. $x = y + 8$. 3°. $z = y - 2$.

Huitieme ſolution.

Je ſuppoſe $y = 0$, donc $z = 2$ & $x = 8$ (par les équations précédentes).

$u = 7$. $p = 2$.

Som-mes.
1e Fem. $xu + 10p - px = 56 + 20 - 16 = 60$.
2e Fem. $zu + 25p - pz = 14 + 50 - 4 = 60$.
3e Fem. $yu + 30p - py = 0 + 60 - 0 = 60$.

L'argent que chaque femme rapporte dans cette ſolution, eſt le même que dans la précédente : cependant ces deux ſolutions ſont fort différentes l'une de l'autre, comme il eſt aiſé de connoître ſi l'on y fait quelque attention.

Neuvieme ſolution.

Je ſuppoſe $y = 1$, par conſéquent $z = 3$, & $x = 9$. (ſelon les équations dernieres.)

$u = 7$. $p = 2$.

Som-mes.
1e Fem. $xu + 10p - px = 63 + 20 - 18 = 65$.
2e Fem. $zu + 25p - pz = 21 + 50 - 6 = 65$.
3e Fem. $yu + 30p - py = 7 + 60 - 2 = 65$.

Cette neuvieme ſolution fait connoître que la premiere femme a vendu 9 pommes à 7 deniers, dans la premiere vente, & une à 2 deniers dans la deuxieme vente : que la ſeconde femme a vendu 3 pommes à 7 deniers dans la premiere vente, & 22 à deux deniers dans la deuxieme vente : que la troiſieme femme a vendu 1 pomme à 7 deniers dans la premiere vente, & 29 à 2 deniers dans la deuxieme vente; d'où il ſuit que chacune a rapporté 65 deniers.

Dixieme ſolution.

Je ſuppoſe enfin $y=2$, donc $z=4$ & $x=10$. (dernieres équations).

$u=7$. $p=2$.

Sommes.
- 1e Fem. $xu+10p-px=70+20-20=70$.
- 2e Fem. $zu+25p-pz=28+50-8=70$.
- 3e Fem. $yu+30p-py=14+60-4=70$.

Enfin cette derniere ſolution montre que la premiere femme a vendu les 10 pommes à 7 deniers dans la premiere vente, mais elle n'en a point vendu dans la deuxieme; que la ſeconde femme a vendu 4 pommes à 7 deniers dans la premiere vente, & 21 à 2 deniers dans la ſeconde vente; que la troiſieme femme a vendu 2 pommes à 7 deniers dans la premiere vente, & 28 à 2 deniers dans la deuxieme vente. D'où il ſuit que chacune a rapporté 70 deniers du marché.

❀

QUESTION. II.

Un chef de cuiſine a une certaine quantité d'œufs. Trois de ſes aides lui en demandent. Il en donne au premier la moitié de ce qu'il a, & la moitié d'un œuf; au ſecond la moitié de ce qui lui reſte & la moitié d'un œuf : enfin il donne au dernier la moitié de ce qui lui reſte & la moitié d'un œuf. On demande combien ce chef de cuiſine avoit d'œufs & comment il a pu faire pour en donner des moitiés ſans en caſſer.

LA ſolution de cette queſtion paroît impoſſible d'abord, à cauſe des moitiés d'œufs qu'il faut donner : cependant on verra bientôt que cette queſtion a des ſolutions à l'infini. Pour trouver le plus petit nombre d'œufs que puiſſe avoir le chef de cuiſine, prenez la troiſieme puiſſance de 2, qui eſt 8; diminuez ce 8 de l'unité, & le nombre 7 ſera le plus petit nombre qu'on cherche : car ce chef de cuiſine ayant donné au premier aide quatre œufs, il lui en a donné la moitié de ce qu'il avoit, avec la moitié d'un œuf, & il lui eſt reſté trois œufs. Ayant donné au ſecond aide de cuiſine deux œufs, il lui a donné la moitié de ce premier reſte, avec la moitié d'un œuf, & il lui eſt reſté un œuf. Enfin ayant donné au troiſieme aide un œuf, il lui a donné la moitié de ce deuxieme reſte, avec la moitié d'un œuf. Dans ce cas il n'eſt point reſté d'œuf au chef de cuiſine.

Si on veut de plus grands nombres que 7, il faut multiplier ſéparément le cube 8 par les nombres 2, 3, 4, 5, &c. ſelon leur ſuite naturelle, diminuer le produit de l'unité, & l'on aura autant

de nombres qu'on voudra à l'infini, qui satisferont à la question.

Observations.

J'ai dit qu'il falloit prendre la troisieme puissance de deux, parce qu'il n'y a que trois aides; mais s'il y en avoit quatre, il faudroit prendre la quatrieme puissance, qui est 16, & la diminuer de l'unité : s'il y en avoit cinq, il faudroit prendre la cinquieme puissance de 2, qui est 32, & la diminuer de l'unité, & ainsi des autres. Pour avoir plusieurs nombres qui satisfassent à la question, il faut multiplier ces puissances par quelque nombre pris à volonté, & ôter l'unité du produit.

QUESTION III.

Une femme de la campagne a porté au marché des œufs, des fromages & des choux; elle a vendu les œufs 2 deniers, les fromages 6 deniers, & les choux 4 deniers : elle rapporte 10 sols. Combien avoit-elle d'œufs, combien de fromages, combien de choux?

Elle pouvoit avoir sept œufs, quinze fromages & quatre choux.

PROBLEME XXIX.

Plusieurs nombres pris suivant leur suite naturelle, 1, 2, 3, 4, &c. étant disposés en rond, deviner celui que quelqu'un aura pensé.

Pl. 1, fig. 2.

On se servira commodément des dix premieres cartes d'un jeu entier, pour exécuter ce problême. On les disposera en rond, comme vous

voyez les dix premiers nombres dans la figure. l'as ſera repréſenté par la lettre A jointe à 1, & le dix ſera repréſenté par la lettre K jointe à 10.

Ayant fait toucher un nombre, ou une carte telle que voudra celui qui en aura penſé une, ajoutez au nombre de cette carte touchée le nombre des cartes que l'on aura choiſies, comme 10, dans cet exemple : puis faites compter la ſomme que vous aurez à celui qui a penſé la carte, par un ordre contraire à la ſuite naturelle des nombres, en commençant par la carte qu'il aura touchée, & en attribuant à cette carte le nombre de celle qu'il aura penſé ; car en comptant de la ſorte, il finira à compter cette ſomme ſur le nombre ou ſur la carte qu'il aura penſé, & vous fera par conſéquent connoître cette carte.

Comme ſi l'on a penſé 3 marqué par la lettre C, & qu'on ait touché 6 marqué par la lettre F, ajoutez 10 à ce nombre 6, vous aurez la ſomme 16, puis faites compter * cette ſomme 16 depuis le nombre touché F vers E, D, C, B, A, & ainſi de ſuite par un ordre rétrograde ; en ſorte que l'on commence à compter le nombre penſé 3 ſur F, 4 ſur E, 5 ſur D, 6 ſur C, & ainſi de ſuite juſqu'à 16 ; ce nombre 16 ſe terminera en C, & fera connoître qu'on a penſé 3, qui répond à C.

REMARQUES.

I.

On peut prendre un plus grand ou un plus petit nombre de cartes, ſelon qu'on le jugera à propos. S'il y avoit 15, ou 8 cartes, il faudroit ajouter 15 ou 8 au nombre de la carte touchée.

* Obſervez qu'on ne doit pas compter cette ſomme tout haut, mais en ſoi-même, & ſeulement par penſée.

II.

Pour mieux couvrir l'artifice, il faut renverser les cartes, en sorte que les points soient cachés, & bien retenir la suite naturelle des cartes, & en quel endroit est le premier nombre, ou l'as, afin de sçavoir le nombre de la carte touchée, pour trouver celui jusqu'où il faut faire compter.

PROBLEME XXX.

Ayant fait prendre à trois personnes un nombre de jettons, ou de cartes à certaines conditions, deviner combien chacune en aura pris.

FAites prendre au troisieme un nombre de jettons ou de cartes, tel qu'il voudra, pourvu qu'il soit pairement pair, c'est-à-dire, divisible par 4, puis faites prendre au second autant de fois 7 que le premier aura pris de fois 4, & au premier autant de fois 13. Après cela dites au premier de donner de ses jettons aux deux autres autant qu'ils en auront chacun, & au second de donner de ses jettons aussi aux deux autres autant qu'ils en auront chacun; & enfin au troisieme de donner aussi de ses jettons aux deux autres autant qu'ils en auront chacun, il arrivera alors qu'ils auront chacun autant de jettons l'un que l'autre, & le nombre de chacun sera double de celui que le troisieme a pris au commencement. C'est pourquoi si vous demandez à l'une de ces trois personnes le nombre de ses jettons, la moitié de ce nombre sera le nombre des cartes ou des jettons que le troisieme avoit au commencement; & si vous pre-

nez autant de fois 7, & autant de fois 13 qu'il y aura de fois 4 dans le nombre du troiſieme, vous aurez le nombre des cartes & des jettons que le ſecond & le premier avoient pris.

Comme ſi le troiſieme prend 8 cartes, le ſecond en doit prendre 14, ſçavoir, deux fois 7, parce que dans 8 il y a deux fois 4, & le premier en doit prendre 26, ſçavoir, deux fois 13, par la même raiſon. Si le premier, qui a 26 cartes, en donne 14 au ſecond, qui en a auſſi 14, & 8 au premier qui en a auſſi 8, il lui en reſtera ſeulement 4, le ſecond en aura 28, & le troiſieme 16. Mais ſi le ſecond, qui a 28 cartes, en donne 4 au premier qui en a auſſi 4, & 16 au troiſieme, qui en a auſſi 16, il lui en reſtera 8, & le premier en aura 8, & le troiſieme 32. Enfin ſi le troiſieme, qui a 32 cartes, en donne 8 à chacun des deux autres, qui en ont chacun 8, ils en auront chacun 16, qui eſt le double du nombre 8 des cartes que le premier a pris au commencement, &c.

1e.	2e.	3e.
26	14	8
4	28	16
8	8	32
16	16	16

PROBLEME XXXI.

De trois cartes inconnues, deviner celle que chacune des trois perſonnes aura priſe.

IL ne faut pas que le nombre des points de chacune des trois cartes, qui aura été priſe, ſurpaſſe 9; & alors pour trouver ce nombre, dites à la premiere perſonne d'ôter 1 du double du nombre des points de ſa carte, & qu'après avoir multiplié le reſte par 5, elle ajoute au produit le nombre des

points de la carte que la seconde personne aura prise. Après cela faites ajouter 5 à cette somme, pour avoir une seconde somme, & ayant fait ôter 1 du double de cette seconde somme, faites multiplier le reste par 5, & ajouter au produit le nombre des points de la carte que la troisieme personne aura prise. Enfin demandez la somme qui vient de cette derniere addition ; car si vous y ajoutez 5, vous aurez une autre somme composée de trois figures, dont la premiere vers la gauche sera le nombre des points de la carte que la premiere personne aura prise, celle du milieu sera le nombre des points de la carte de la seconde personne, & la derniere vers la droite fera connoître la carte de la troisieme personne.

Comme si le premier a pris un 3, le second un 4, & le troisieme un 7 ; en ôtant 1 du double 6 du nombre 3 des points de la carte du premier, & en multipliant le reste 5 par 5, on a 25, auquel ajoutant le nombre 4 des points de la carte du second, on a cette somme 29, à laquelle si on ajoute 5, on a cette seconde somme 34, dont le double est 68, d'où ôtant 1, il reste 67, qui étant multiplié par 5, donne 335, auquel ajoutant le nombre 7 des points de la carte du troisieme, & 5 de plus, on a cette derniere somme 347, dont les trois figures représentent séparément les nombres des points de chaque carte.

Autrement.

Ayant dit au premier d'ajouter 1 au double du nombre des points de sa carte, faites multiplier la somme par 5, & ajouter au produit le nombre des points de la carte du second ; puis ayant fait encore ajouter 1 au double de la somme précédente,

faites multiplier le tout par 5, & ajouter au produit le nombre des points de la carte du troisieme. Après cela demandez la somme qui viendra de cette derniere addition, d'où vous ôterez 55, pour avoir au reste un nombre qui sera composé de trois figures, dont chacune représentera, comme auparavant, le nombre des points de chaque carte.

Comme, dans le même exemple, en ajoutant 1 au double 6 du nombre 3 des points de la carte du premier, & en multipliant la somme 7 par 5, on a 35, auquel ajoutant le nombre 4 des points de la carte du second, on a 39, dont le double est 78, auquel ajoutant 1, & multipliant la somme 79 par 5, on a 395, auquel ajoutant le nombre 7 des points de la carte du troisieme, on a 402, d'où ôtant 55, il reste 347, dont les trois figures représentent en particulier le nombre des points de chaque carte.

PROBLEME XXXII.

Trois cartes ayant été présentées à trois personnes, deviner celle que chacune aura prise.

On doit sçavoir quelles cartes ont été présentées, c'est pourquoi nous appellerons l'une A, l'autre B, & la troisieme C. Mais on laisse la liberté aux trois personnes de choisir en particulier telle carte qu'il leur plaira. Quand ce choix, qui peut se faire en six manieres différentes, sera fait, donnez à la premiere personne ce nombre 12, à la seconde ce nombre 24, & à la troisieme ce nombre 36. Après cela dites à la premiere personne d'ajouter ensemble la moitié du nombre de celle qui a pris la carte A, le tiers du nombre de

celle qui a pris la carte B, & le quart du nombre de celle qui a pris la carte C, & demandez-lui la

1e.	2e.	3e.	*Sommes.*
12	24	36	
A	B	C	23
A	C	B	24
B	A	C	25
C	A	B	27
B	C	A	28
C	B	A	29

ſomme qui ſera ou 23, ou 24, ou 25, ou 27, ou 28, ou 29, comme vous voyez dans cette table, qui montre que ſi cette ſomme eſt 25, par exemple, la premiere perſonne aura pris la carte B, la ſeconde la carte A, & la troiſieme la carte C; & que ſi cette ſomme eſt 28, la premiere perſonne aura pris la carte B, la deuxieme la carte C, & la troiſieme la carte A. Ainſi des autres.

PROBLEME XXXIII.

Deviner entre pluſieurs cartes, celle que quelqu'un aura penſé.

AYant pris à volonté dans un jeu de cartes, un certain nombre de cartes, montrez-les par ordre ſur une table à celui qui en veut penſer une, commencez par celle de deſſous, & mettez-les proprement l'une ſous l'autre; puis dites-lui de ſe ſouvenir du nombre qui exprime la quantieme qu'il aura penſée; ſçavoir, de 1, s'il a penſé la premiere; de 2, s'il a penſé la ſeconde; de 3, s'il a penſé la troiſieme, &c. Mais en même tems comptez

ſecretement celle que vous montrez, dont le nombre ſera, par exemple, 12; & ſéparez-les adroitement du reſte du jeu. Après cela mettez ces cartes, dont vous ſçavez le nombre, dans une ſituation contraire, en commençant à mettre ſur le reſte du jeu la carte qui aura été miſe la premiere ſur la table, & en finiſſant par celle qui aura été montrée la derniere; enfin ayant demandé le nombre de la carte penſée, que nous ſuppoſerons être la quatrieme, remettez à découvert vos cartes ſur la table l'une après l'autre, en commençant par celle de deſſus, à laquelle vous attribuerez le nombre 4 de la carte penſée, en comptant 5 ſur la ſeconde carte ſuivante, & pareillement 6 ſur la troiſieme carte plus baſſe, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que vous ſoyez parvenu au nombre 12 des cartes que vous aviez priſes au commencement; car la carte ſur laquelle tombera ce nombre 12, ſera celle qui aura été penſée.

PROBLEME XXXIV.

Pluſieurs cartes différentes étant propoſées ſucceſſivement à autant de perſonnes, pour en retenir une dans ſa mémoire, deviner ce que chacun aura penſé.

S'Il y a, par exemple, trois perſonnes, montrez trois cartes à la premiere perſonne, pour en retenir une dans ſa penſée, & mettez à part ces trois cartes. Préſentez auſſi trois autres cartes à la ſeconde perſonne, pour en penſer une à ſa volonté, & mettez auſſi à part ces trois cartes. Enfin préſentez à la troiſieme perſonne trois autres cartes, pour lui faire penſer celle qu'il voudra,

& mettez pareillement à part ces trois dernieres cartes. Cela étant fait, disposez à découvert les trois premieres cartes en trois rangs, & mettez dessus les trois autres cartes, & dessus celles-ci les trois dernieres, pour avoir ainsi toutes les cartes disposées en trois rangs, dont chacun sera composé de trois cartes. Après quoi il faut demander à chaque personne dans quel rang est la carte qu'il a pensée: alors il sera facile de connoître cette carte, parce que la carte de la premiere personne sera la premiere de son rang; de même la carte de la seconde personne sera la seconde de son rang; enfin la carte de la troisieme personne sera la troisieme de son rang.

PROBLEME XXXV.

Plusieurs cartes étant disposées également en trois rangs, deviner celle que quelqu'un aura pensé.

IL est évident que le nombre des cartes doit être divisible par 3, afin qu'on en puisse faire trois rangs égaux. Supposant donc qu'il y ait, par exemple 36 cartes, dont chaque rang en comprendra par conséquent 12, demandez en quel rang est la carte qu'on aura pensé, & ayant ramassé toutes les cartes, ensorte que le rang où sera la carte pensée, soit entre les deux autres rangs; disposez de nouveau ces 36 cartes en trois rangs égaux, en mettant la premiere au premier rang, la seconde au second, la troisieme au troisieme, puis la quatrieme au premier rang, & pareillement la suivante au second rang, en continuant ainsi jusqu'à ce que toutes les cartes soient rangées. Après quoi vous demanderez encore dans quel rang est la carte

pensée, & ayant ramassé de nouveau toutes les cartes, ensorte que le rang où sera la carte pensée, soit aussi entre les deux autres, vous ferez, comme auparavant, trois rangs égaux des mêmes cartes. Ayant enfin demandé dans quel rang est la carte pensée, vous connoîtrez aisément cette carte, parce qu'elle se trouvera au milieu de son rang; sçavoir, dans cet exemple, la sixieme. Ou bien, pour mieux cacher l'artifice, elle se trouvera au milieu de toutes les cartes, ou la dix-huitieme, lorsqu'on les aura ramassées comme auparavant; mais il faut faire ensorte que le rang où sera la carte pensée, soit toujours entre les deux autres.

PROBLEME XXXVI.

Deviner combien il y a de points dans une carte que quelqu'un aura tirée d'un jeu de carte.

AYant pris un jeu entier de 52 cartes, présentez-le à quelqu'un de la compagnie, qui tirera celle qu'il lui plaira, sans vous la montrer. Ensuite faisant valoir toutes les cartes selon leur valeur marquée, vous ferez valoir le valet 11, la dame 12, & le roi 13; puis comptant les points de toutes les cartes, vous ajouterez les points de la premiere carte aux points de la seconde, ceux-ci aux points de la troisieme, & ainsi de suite, vous rejetterez tous les 13, & garderez le reste pour l'ajouter à la carte suivante. On voit qu'il est inutile de compter les rois, qui valent 13. Enfin s'il reste quelques points à la derniere carte, vous ôterez ces points de 13, & le reste marquera les points de la carte qu'on aura tirée : ensorte que si le reste est 11, ce sera un valet qu'on aura tiré; si

le reſte eſt 12, ce ſera une dame, &c. mais s'il ne reſte rien, on aura tiré un roi. Vous connoîtrez quel eſt ce roi, en regardant celui qui manque dans les cartes que vous avez.

Si l'on veut ſe ſervir d'un jeu composé ſeulement de 32 cartes, dont on ſe ſert à préſent pour jouer au piquet, on ajoutera tous les points des cartes, comme on vient de dire, mais on rejettera tous les 10 qui ſe trouveront en faiſant cette addition. Enfin on ajoutera 4 au point de la derniere carte pour avoir une ſomme, laquelle étant ôtée de 10, ſi elle eſt moindre, ou de 20, ſi elle ſurpaſſe 10, le reſte ſera le nombre de la carte qu'on aura tirée; de ſorte que s'il reſte 2, ce ſera un valet; s'il reſte 3, ce ſera une dame; & ſi le reſte eſt 4, on aura tiré un roi, &c.

Si le jeu de cartes eſt imparfait, on doit prendre garde aux cartes qui manquent, & ajouter à la derniere ſomme le nombre des points de toutes ces cartes qui manquent, après qu'on aura ôté de ce nombre autant de fois 10 qu'il ſera poſſible: & la ſomme qui viendra de cette addition, doit être, comme auparavant, ôtée de 10, ou de 20, ſelon qu'elle ſera au-deſſous, ou au-deſſus de 10. Il eſt évident que ſi l'on regarde encore une fois les cartes, on pourra nommer celle qui aura été tirée.

PROBLEME XXXVII.

Deviner le nombre de tous les points qui ſont en deux cartes qu'on aura tirées d'un jeu de cartes entier.

Dites à celui qui aura tiré à l'aventure deux cartes du jeu composé de 52 cartes, d'ajouter

à chacune des ses cartes, autant d'autres cartes que le nombre des ses points sera au-dessous de 25, qui est la moitié de toutes les cartes, diminué de l'unité, en donnant à chaque carte figurée tel nombre qu'on voudra. Comme si la premiere carte est un dix, on y ajoutera 15 cartes, & si la seconde carte est un sept, on y ajoutera 18 cartes; ce qui fera en tout 33 cartes : de sorte que dans cet exemple il restera 17 cartes de tout le jeu. Prenant donc les cartes qui restent du jeu, & trouvant qu'il en reste 17, ce nombre 17 sera le nombre de tous les points pris ensemble des deux cartes qu'on aura tirées.

Pour mieux cacher l'artifice, il ne faut point toucher aux cartes ; mais il faut faire ôter le nombre des points de chacune des deux cartes qui ont été prises, de 26, qui est la moitié du nombre de toutes les cartes, & faire ajouter ensemble les deux restes, pour avoir leur somme, que vous devez demander, afin de l'ôter du nombre de toutes les cartes, c'est-à-dire, de 52 ; car le nombre qui restera, sera celui qu'on cherche.

Comme dans cet exemple, où l'on suppose qu'on a pris un dix & un sept, en ôtant 10 de 26, il reste 16 & en ôtant 7 de 26, il reste 19, & en ajoutant ensemble les deux restes 16, 19, on a 35 pour leur somme, laquelle étant ôtée de 52, il reste 17 pour le nombre des points des deux cartes qu'on a tirées.

On fera la même chose avec un jeu de piquet, composé de 36 cartes, ou seulement de 32 cartes.

Mais pour cacher encore mieux l'artifice, au lieu de la moitié 26 de toutes les cartes, quand il y en a 52, prenez un autre nombre moindre, mais plus grand que 10, comme 24, duquel ôtant 10 &

7, il reste 14 & 17, dont la somme 31 étant ôtée de la somme 52 de toutes les cartes, il reste 21, d'où vous ôterez encore 4, qui est le double de l'excès de 26 sur 24, pour avoir au reste 17 le nombre des points des deux cartes qu'on a tirées ; sçavoir, du dix & du sept.

Quand on se servira d'un jeu de piquet, composé de 36 cartes, au lieu de la moitié 18 du nombre 36 de toutes les cartes, on prendra pareillement un nombre moindre, comme 16, duquel ôtant 10 & 7, il reste 6 & 9, dont la somme 15 étant ôtée du nombre 36 de toutes les cartes, il reste 21, d'où vous ôterez encore 4, qui est le double de l'excès de 18 sur 16, pour avoir au reste 17, le nombre des points des deux cartes qui ont été tirées.

Pareillement, si le jeu de piquet n'est que de 32 cartes, au lieu de la moitié 16 du nombre 32 de toutes les cartes, on prendra un nombre moindre tel que l'on voudra, pourvu qu'il soit plus grand que 10, comme 14, duquel ôtant 10 & 7, il reste 4 & 7, dont la somme 11 étant ôtée de 32, il reste 21, d'où il faut encore ôter 4, qui est le double de l'excès de 16 sur 14, pour avoir au reste 17, le nombre des points du dix & du sept qu'on a tiré.

PROBLEME XXXVIII.

Deviner le nombre de tous les points qui sont en trois cartes, qu'on aura tiré à volonté d'un jeu de cartes.

I.

POur résoudre ce problême comme le précédent, en suivant la voie la plus courte, il faut que le nombre des cartes dont le jeu est composé, soit

ſoit diviſible par 3 ; ainſi le jeu de 52 cartes, & celui de 32 cartes ne ſont pas ſi convenables : celui de 36 cartes convient mieux, parce que 36 a pour troiſieme partie 12, qui nous ſervira pour réſoudre la queſtion en cette ſorte.

Dites à celui qui aura tiré à volonté trois cartes d'un jeu de piquet, composé de 36 cartes, d'ajouter à chacune de ces cartes, autant d'autres cartes que le nombre de ſes points ſera au-deſſous de 11, qui eſt le tiers du nombre de toutes les cartes, diminué de l'unité, en donnant, comme dans le problême précédent, à chaque carte figurée, tel nombre qu'on voudra. Comme ſi la premiere carte eſt un neuf, on y ajoutera 2 cartes; ſi la ſeconde carte eſt un ſept, on y ajouteta 4 cartes, & ſi la troiſieme carte eſt un ſix, on y ajoutera 5 cartes, ce qui fait en tout 14 cartes qu'on a tiré du jeu; de ſorte que dans cet exemple il reſtera 22 cartes de tout le jeu. Prenant donc les cartes qui reſtent du jeu, & trouvant qu'il en reſte 22, ce nombe 22 fera connoître le nombre de tous les points des trois cartes qu'on aura tirées.

Ou bien ſans toucher aux cartes, & pour mieux cacher l'artifice, faites ôter de 12, qui eſt le tiers du nombre 36 de toutes les cartes, le nombre des points de chacune des trois cartes qu'on a priſes, & faites ajouter enſemble les trois reſtes, pour avoir leur ſomme, que vous devez demander, afin de l'ôter du nombre de toutes les cartes, c'eſt-à-dire, de 36 ; car le nombre qui reſtera, ſera celui qu'on cherche.

Comme dans cet exemple, où l'on a ſuppoſé qu'on a pris un neuf, un ſept & un ſix, ôtant 9 de 12, il reſte 3; ôtant 7 de 12, il reſte 5; enfin ôtant 6 de 12, il reſte 6, & ajoutant enſemble les

trois restes 3, 5, 6, on a 14 pour leur somme, laquelle étant ôtée de 36, il reste 22 pour le nombre des points des trois cartes qui ont été tirées.

II.

Pour mieux encore cacher l'artifice, & pour appliquer la regle à un jeu de plus ou de moins de 36 cartes, comme de 52 cartes, servez-vous d'un nombre plus grand que 10, & moindre que 17, tiers de 52, par exemple, de 15 : & dites à celui qui aura tiré les trois cartes, d'ajouter à chacune de ses cartes autant d'autres cartes que le nombre de ses points sera au-dessous de 15; comme si la premiere carte est un neuf, on y ajoutera 6 cartes, si la seconde carte est un sept, on y ajoutera 8 cartes, & si la troisieme carte est un six, on y ajoutera 9 cartes, ce qui fera en tout 26 cartes; de sorte que dans cet exemple, il restera de tout le jeu 26 cartes. Prenant donc les cartes qui restent du jeu, & trouvant qu'il en reste 26, ôtez de 26 le nombre 4, qui est l'excès de 52, nombre de toutes les cartes sur le triple de 15, augmenté de 3, c'est-à-dire, sur 48, & le reste 22 sera le nombre de tous les points des trois cartes qui auront été tirées du jeu.

Ou bien sans toucher aux cartes, faites ôter le nombre des points de chacune des trois cartes qui auront été prises, de 16, qui surpasse de l'unité le premier nombre 15, & faites ajouter ensemble tous les restes, pour avoir leur somme, que vous devez demander, afin de l'ôter du nombre précédent 48; car le reste sera le nombre de tous les points des trois cartes qu'on aura prises.

Comme dans cet exemple, où l'on suppose qu'on a pris un neuf, un sept & un six, en ôtant

9 de 16, il reste 7 ; ôtant 7 de 16, il reste 9 ; enfin ôtant 6 de 16, il reste 10, & ajoutant ensemble les trois restes 7, 9, 10, on a 26 pour leur somme, laquelle étant ôtée de 48, il reste 22 pour le nombre des points des trois cartes qui ont été prises.

Mais si vous voulez vous servir d'un jeu composé de 36 cartes, & prendre un nombre plus grand que 10, comme 15, après avoir ajouté les cartes, qui seront au nombre de 26, comme vous avez vu, ôtez 26 de 36, nombre de toutes les cartes, ajoutez au reste 10 ce nombre 12, qui est l'excès du triple de 15, augmenté de 3, c'est-à-dire, de 48, sur le nombre 36 de toutes les cartes, & la somme 22 sera le nombre des points qu'on cherche. Au lieu de 12, il faut ajouter 16, pour un jeu de piquet de 32 cartes, parce qu'ôtant 32 de 48, il reste 16.

III.

A l'imitation de ce problême & du précédent, il sera aisé de résoudre la question pour quatre cartes qu'on aura tirées, & pour un plus grand nombre.

REMARQUES.

De quelque maniere qu'on exécute ce problême, soit avec un jeu entier de cartes, ou avec un jeu qui ne soit point entier, soit qu'on tire du jeu trois cartes ou davantage, soit enfin qu'après avoir tiré du jeu un certain nombre de cartes, on fasse accomplir 15, ou quelqu'autre nombre, comme 14, 13, 16, &c. selon ce qui a été dit dans l'article II. Voici la regle générale qu'on doit suivre.

Multipliez le nombre que vous faites accomplir par le nombre des cartes choisies; ajoutez au

produit ce même nombre des cartes choisies, & ôtez cette somme du nombre des cartes du jeu dont on se sera servi, comme de 52, si le jeu est entier, ou de 36, s'il n'est point entier, &c. le reste sera le nombre qu'il faudra ôter des cartes qui seront restées de tout le jeu. Le nombre des cartes restées après cette derniere soustraction exprimera le nombre des points des cartes choisies.

Exemple.

Supposé qu'on ait choisi dans un jeu entier 4 cartes, dont les points soient 3, 5, 7, 10, & qu'on ait fait accomplir les points de chacune jusqu'à 11, il faut multiplier 11 par 4, nombre des cartes choisies, & ajouter au produit 44 le même nombre 4; la somme sera 48, que vous ôterez de 52, nombre des cartes du jeu entier, il restera 4, qu'il faudra ôter de 29, nombre des cartes qui seront restées du jeu, après que celui qui aura choisi les quatre cartes en aura tiré 8, pour accomplir 11 avec les 3 points de la premiere carte, 6 pour accomplir 11 avec les 5 points de la seconde carte, 4 pour accomplir 11 avec les 7 points de la troisieme carte, & 1 pour accomplir 11 avec les dix points de la quatrieme : toutes ces cartes 8, 6, 4, 1, avec les 4 choisies, font 23, qui, étant ôtés de 52, donnent pour reste 29. Ayant donc ôté 4 de 29, le reste 25 marquera la somme des points des quatre cartes choisies, 3, 5, 7, 10.

Si après avoir ôté du nombre des cartes du jeu proposé, la somme composée du nombre des cartes choisies, & du produit de ce même nombre des cartes choisies, par le nombre qu'on a fait accomplir, il ne reste rien, le nombre des cartes restées

de tout le jeu, exprimera le nombre des points des cartes choisies.

Exemple.

Qu'on ait choisi dans un jeu entier quatre cartes, dont les points soient 1, 3, 4, 7, & qu'on les ait fait accomplir jusqu'à 12, il faut multiplier 12 par 4, nombre des cartes choisies, & ajouter au produit 48, le même nombre 4; la somme sera 52, égale au nombre des cartes du jeu entier. Comme il ne reste rien, c'est une marque que le nombre des points des cartes choisies sera exprimé par le nombre des cartes restantes, qui est 15. Car pour accomplir 12 avec 1, point de la premiere carte, il faut 11 cartes; pour accomplir 12 avec les trois points de la seconde carte, il faut 9 cartes; pour accomplir 12 avec les 4 points de la troisieme carte, il faut 8 cartes: enfin pour accomplir 12, avec les 7 points de la quatrieme carte, il faut 5 cartes. Toutes ces cartes 11, 9, 8 5, avec les 4 choisies font 37, qui étant ôtés de 52, donnent pour reste 15, nombre des points des cartes choisies, 1, 3, 4, 7.

Si la somme composée du nombre des cartes choisies, & du produit de ce même nombre par le nombre qu'on a fait accomplir, se trouve plus grande que le nombre des cartes du jeu proposé, alors il faut soustraire de cette somme le nombre des cartes du jeu proposé, & le reste sera un nombre qu'il faudra ajouter au nombre des cartes restées, pour avoir le nombre des points des cartes choisies.

Exemple.

Si l'on avoit choisi dans un jeu de trente-six cartes, 3 cartes, dont les points fussent 4, 7, 9,

& qu'on ſe propoſe d'accomplir ces points juſqu'à 15, avec le nombre des cartes qu'on auroit tiré du jeu, il faudroit multiplier 15, nombre qu'on a fait accomplir, par 3 nombre des cartes choiſies, le produit eſt 45, auquel on ajoutera 3, nombre des cartes choiſies. La ſomme 48 eſt plus grande que 36, nombre des cartes du jeu propoſé : il faut donc ôter 36 de 48, le reſte 12 doit être ajouté au nombre des cartes reſtées, qui eſt 8; car on a dû tirer du jeu propoſé 11 cartes, pour accomplir 15, avec les 4 points de la premiere carte; 8 pour accomplir 15, avec les 7 points de la deuxieme carte; & 6 pour accomplir 15, avec les neuf points de la troiſieme carte : toutes ces cartes 11, 8, 6, avec les 3 choiſies, font 28, qui étant ôtés de 36, nombre des cartes du jeu propoſé, donnent pour reſte 8. Ayant donc ajouté ces 8 cartes avec les 12, différence de 48, ſomme trouvée, à 36, nombre des cartes du jeu propoſé, on aura 20 pour le nombre des points des cartes choiſies 4, 7, 9.

Il faut obſerver 1°. qu'on peut faire accomplir tel nombre qu'on voudra, en comptant, les points de chaque carte juſqu'à ce nombre : il n'eſt pas même néceſſaire de faire accomplir le même nombre avec les points des cartes choiſies. Par exemple, on peut, avec les points des trois cartes choiſies, faire accomplir trois différens nombres, comme 13, 14, 15, ; alors on ajoutera enſemble ces trois nombres, que l'on augmentera de 3, nombre des cartes choiſies, & l'on achevera le reſte comme on a dit.

Il faut 2°. prendre garde qu'il peut arriver que la ſomme des nombres qui vient, lorſqu'on a fait accomplir, eſt ſi grande, qu'il n'y aura point aſſez de cartes dans le jeu propoſé pour les en tirer.

Néanmoins on résoudra le problême, si on sait de combien le nombre des cartes qu'on devroit retirer, surpasse celui des cartes du jeu proposé. Par exemple, si le nombre des cartes du jeu proposé étoit 36, qu'on eût fait accomplir 15, & que les trois cartes choisies fussent 2, 3, 4, il est certain qu'on ne pourroit pas retirer de 26 toutes les cartes, lorsqu'on auroit fait accomplir 15 avec tous les points de chacune des cartes; car il faudroit prendre 13 cartes pour accomplir 15 avec 2 points de la premiere carte, 12 pour la seconde, & 11 pour la troisieme; mais ces trois nombres 13, 12, 11, avec 3, nombre des cartes choisies, font 39, qui est plus grand que 36. Il faudra donc sçavoir que 39 surpasse 36 de 3 : alors on ôtera cet excès 3 de 12, autre excès de 36, nombre des cartes du jeu proposé à 48, somme de 3, nombre des cartes choisies, & du produit de ce même nombre 3 par 15, nombre qu'on a fait accomplir; & le reste 9 est le nombre des points des trois cartes choisies, 2, 3, 4. Consultez Bachet, dans ses *problêmes plaisans & délectables*, où vous trouverez des démonstrations de plusieurs problêmes qu'on propose dans ces problêmes d'arithmétique.

PROBLEME XXXIX.

De seize jettons, deviner celui que quelqu'un aura pensé.

IL faut disposer ces jettons en deux rangs, en sorte qu'il y en ait 8 en l'un & 8 en l'autre, comme on le voit dans la figure suivante. Ensuite il faut demander à celui qui aura pensé un jetton dans quel rang il est. S'il répond qu'il est dans le

rang A, levez les jettons de la rangée A, & disposez-les en deux rangées, dont l'une contiendra 4 jettons, & la seconde 4 autres, comme vous voyez en C & D, ayant laissé la rangée B sans y toucher. Demandez encore en quel rang est le jetton pensé. Si on dit qu'il est dans le rang C, levez le rang C & le rang D, de maniere que les

A	B	C	B	D	E	B	F	H	B	I
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	*o*
o	o	o	o	o	*o*	o	o	o	o	o
o	o	*o*	o	o	o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
o	o		o			o			o	
o	o		o			o			o	
o	o		o			o			o	
o	o		o			o			o	

jettons d'un rang ne soient point confondus avec les jettons de l'autre rang, & faites-en deux autres rangs, comme vous voyez en E & F; mais en les rangeant, faites que les jettons du rang C soient posés de côté & d'autre du rang B, en sorte que le premier du rang C soit le premier du rang E, le second du rang C, soit le premier du rang F, & le troisieme du rang C, soit le second du rang E, puis le quatrieme du rang C, soit le second du rang F, &c. Demandez encore en quel rang se trouve le jetton pensé; & si on vous dit qu'il est dans le rang E, levez encore les jettons comme on vient de le dire & disposez-les de la même façon. Demandez enfin en quel rang est le jetton pensé: il doit occuper la premiere place du rang où l'on aura dit qu'il se trouve: comme dans cette figure, où le jetton italique est le premier de son rang.

REMARQUE.

Il ſeroit plus aiſé d'exercer ce problême avec des cartes, & on couvriroit davantage l'artifice, en battant les cartes, après avoir connu celle qui aura été penſée, & en les comptant pour la découvrir.

PROBLEME XL.

Du jeu de l'anneau.

CE jeu ſe peut pratiquer agréablement dans une compagnie compoſée de pluſieurs perſonnes, dont le nombre ne doit pas être plus grand que 9, afin d'y pouvoir plus facilement appliquer le problême XXI.* On fera valoir 1 la premiere perſonne, 2 la ſeconde, 3 la troiſieme, & ainſi de ſuite. On fera auſſi valoir 1 la main droite, & 2 la main gauche. On donnera pareillement 1 au premier doigt d'une main, 2 au ſecond, 3 au troiſieme, 4 au quatrieme, 5 au cinquieme. Enfin on donnera 1 à la premiere jointure, 2 à la ſeconde, & 3 à la troiſieme. Cela étant imaginé, ſi l'on fait mettre à l'une de ces perſonnes, par exemple à la cinquieme, un anneau à la premiere jointure du quatrieme doigt de ſa main gauche, il eſt évident que pour deviner la perſonne qui aura pris cet anneau ou bague, & dire en quelle main, en quel doigt & en quel jointure il eſt, il n'y a qu'à deviner ces quatre nombres 5, 1, 4, 2, le premier 5 repréſentant la cinquieme perſonne, le ſecond 1 la premiere jointure, le troiſieme 4 le quatrieme doigt, & le quatrieme 2 la main gauche. Ce qui ſe fera en ſuivant la derniere méthode du problême XXI,* comme vous allez voir.

* Pag. 163, art. IV.

Otant 1 de 10, double du premier nombre 5, & multipliant le reste 9, par 5, on a 45, auquel ajoutant le second nombre 1, on a cette somme 46, à laquelle si on ajoute 5, on a cette seconde somme 51, dont le double est 102, d'où ôtant 1, il reste 101, qui étant multiplié par 5, produit 505, auquel ajoutant le troisieme nombre 4, on a cette somme 509, à laquelle ajoutant encore 5, on a cette seconde somme 514, dont le double 1028, étant diminué de 1, & le reste 1027 étant multiplié par 5, produit 5135, auquel ajoutant le quatrieme nombre 2, on a cette somme 5137, à laquelle ajoutant 5, on a cette seconde somme 5142, dont les quatre figures représentent les quatre nombres qu'on cherche, & font connoître par conséquent que l'anneau est dans la premiere jointure du quatrieme doigt de la main gauche de la cinquieme personne.

Autre maniere.

On prendra pour premiere personne, celle qui est le plus à main gauche, comme cela se fait ordinairement; pour la seconde celle qui est après, pour troisieme celle qui est ensuite, & ainsi des autres. On ne fera point d'autre distinction entre les deux mains, que d'observer le même ordre en comptant pour premier doigt le petit doigt de la main droite, & pour le dixieme le petit doigt de la main gauche, ou d'une autre façon, suivant qu'on le trouvera plus commode. Enfin on distinguera par ordre les trois jointures de chaque doigt en commençant par celle qui est le plus proche de la racine du doigt, ou par celle qui est la plus proche du bout du doigt. Cependant comme il semble qu'il n'y a que deux jointures au pouce, il seroit

peut-être plus à propos de compter ces jointures par celle qui est la plus près de l'extrêmité du doigt, & d'avertir qu'on commencera à compter par celle-là.

Cela étant supposé, dites que l'on double le nombre qui convient à la personne qui a la bague, & que l'on ajoute 5 à ce double; dites ensuite qu'on multiplie le tout par 5, & que l'on ajoute à ce produit le nombre qui convient au doigt : cela étant fait, dites encore que l'on multiplie cette somme par 10, & que l'on ajoute au produit le nombre qui convient à la jointure où est la bague. Demandez enfin la somme de ces nombres.

Si vous ôtez secretement de cette somme le nombre 250, le reste exprimera par les centaines le nombre de la personne qui a la bague, par les dixaines le quantieme des doigts, & par les unités la jointure du doigt.

Exemple.

Je suppose que la septieme personne de la compagnie ait la bague au neuvieme doigt, c'est-à-dire, au doigt annulaire de la main gauche, & à la deuxieme jointure de ce doigt. Faites doubler 7, le double sera 14, auquel vous ferez ajouter 5, la somme sera 19 : faites multiplier ces 19 par 5, le produit sera 95, ausquels faisant ajouter le nombre 9 qui convient au doigt, il viendra 104. Faites multiplier ce nombre 104, par 10, on aura pour produit 1040, auxquels faisant ajouter 2, qui convient à la jointure, la somme sera 1042; vous demanderez cette somme, & quand vous la sçaurez, vous en ôterez secretement 250, il restera 792, dont le 7 exprimera la septieme personne qui a la bague, le 9 marquera que c'est au neuvieme doigt, & le 2 fera voir que c'est à la deuxieme jointure.

REMARQUE.

S'il y avoit un zero au rang des dixaines, ce seroit une marque que la bague se trouveroit au dixieme doigt : alors il faudroit ôter 1 du nombre des centaines, & le reste marqueroit le nombre qui convient à la personne qui auroit la bague.

PROBLEME XLI.

Plusieurs cartes étant disposées en divers rangs, deviner celle que quelqu'un aura pensé.

ON prend ordinairement quinze cartes, que l'on dispose en trois rangs, de maniere qu'il y en ait cinq en chaque rang. 1°. Les cartes étant ainsi rangées, & ayant demandé à celui qui en aura pensé une, en quel rang elle se trouve ; ramassez chaque rang, & assemblez-les en mettant dans le milieu celui où se trouvera la carte pensée. 2°. Disposez encore toutes les cartes en trois rangs, mettant la premiere, c'est-à-dire, celle de dessus, au premier rang, la suivante au second rang, la troisieme au troisieme rang, la quatrieme au premier rang, la cinquieme au second rang, & les autres de la même maniere, jusqu'à ce qu'elles soient toutes rangées. Puis ayant encore demandé en quel rang est la carre pensée, vous ramasserez, comme auparavant, chaque rang, & les rassemblerez, en mettant au milieu celui où se trouve la carte pensée. 3°. Vous rangerez encore les cartes de la même maniere qu'on vient de faire, & ayant demandé en quel rang se trouve la carte pensée, vous serez assuré qu'elle sera la troisieme de ce même rang. 4°. Ayant reconnu la carte pensée, vous pou-

vez ramaſſer les rangs, en mettant encore au milieu celui où eſt la carte penſée; pour lors elle ſe trouvera au milieu des quinze cartes, & de quelque côté que l'on commence à compter, elle ſe trouvera la huitieme. On peut auſſi, après avoir reconnu la carte penſée, mêler les cartes, & montrer la carte penſée, en les découvrant l'une après l'autre.

REMARQUES.

On peut faire le même jeu avec un autre nombre de cartes, & en pluſieurs façons différentes. On prendra, par exemple, ſeize cartes que l'on diſpoſera en quatre rangs, à chaque rang on mettra quatre cartes. Après avoir ſçu en quel rang eſt la carte penſée, on levera les rangs; on retiendra dans ſa mémoire celui où eſt la carte penſée, & on rangera les cartes de la maniere qu'on l'a dit, en ſorte que les cartes des rangs précédens ſe ſépareront, & que chacune ſe trouvera dans un autre rang : je veux dire que la premiere, ou celle de deſſus les cartes levées, ſe trouvera au premier rang, la ſuivante ſe trouvera au ſecond rang, la troiſieme au troiſieme rang, & la quatrieme au quatrieme rang. Ainſi les quatre cartes, qui étoient enſemble dans la diſpoſition précédente, ſe trouveront dans les quatre rangs dans cette ſeconde diſpoſition. Par conſéquent, ſi l'on avoit mis le rang où ſe trouvoit la carte penſée au deſſus des autres, on ſeroit aſſuré que cette carte eſt la premiere dans l'un des rangs de cette ſeconde diſpoſition. Il ſera donc très aiſé de la deviner, quand on aura demandé en quel rang elle ſe trouve dans cette ſeconde diſpoſition, puiſqu'elle eſt infailliblement la premiere.

Mais si le rang où se trouvoit la carte dans la premiere disposition, avoit été mis au-dessous du premier des rangs levés, cette même carte se trouveroit la seconde dans l'un des rangs de la deuxieme disposition. On juge bien qu'elle se trouveroit la troisieme dans la seconde disposition, si le rang où elle se trouvoit en premier lieu, avoit été mis dans la troisieme place des rangs levés, & qu'elle se trouveroit la quatrieme de l'un des rangs de la seconde disposition, si ce rang levé avoit été mis à la quatrieme place des rangs levés.

PROBLEME XLII.

Ayant un vase rempli de huit pintes de quelque liqueur, en mettre justement la moitié dans un autre vase de cinq pintes, par le moyen d'un troisieme vase contenant trois pintes.

On propose ordinairement cette question de la sorte : Quelqu'un ayant une bouteille pleine de 8 pintes d'excellent vin, en veut faire présent de la moitié, ou de quatre pintes, à un de ses amis : mais pour la mesurer il n'a que deux autres bouteilles, dont l'une contient 5 pintes, & l'autre 3. On demande comment il doit faire pour mettre quatre pintes dans la bouteille qui en contient cinq.

Pour le sçavoir, appellons A la bouteille de 8 pintes; B celle de 5, & C celle de 3; en supposant qu'il y a 8 pintes de vin dans la bouteille A, & que les deux autres B, C, soient vuides, comme vous voyez en D. Ayant rempli la bouteille B, du vin de la bouteille A, où il ne restera plus que 3 pintes, comme vous voyez en E, remplissez

la bouteille C, du vin de la bouteille B, où par conſéquent il ne reſtera plus que 2 pintes, comme vous voyez en F. Après cela verſez le vin de la bouteille C, dans la bouteille A, où par conſéquent il y aura 6 pintes, comme vous voyez en G; & verſez les 2 pintes de la bouteille B, dans la bouteille C, où il y aura deux pintes, comme vous voyez en H. Enfin ayant rempli la bouteille B, du vin de la bouteille A, où il reſtera ſeulement 1 pinte, comme vous voyez en I; achevez de remplir la bouteille C, du vin de la bouteille B, où il reſtera 4 pintes, comme vous voyez en K, & ainſi la queſtion ſe trouvera réſolue.

	8.	5.	3.
	A.	B.	C.
D.	8.	o.	o.
E.	3.	5.	o.
F.	3.	2.	3.
G.	6.	2.	o.
H.	6.	o.	2.
I.	1.	5.	2.
K.	1.	4.	3.

REMARQUE.

Si au lieu de faire reſter les quatre pintes de vin dans la bouteille B, vous voulez qu'elles reſtent dans la bouteille A, que nous avons ſuppoſée remplie de huit pintes, rempliſſez la bouteille C, du vin qui eſt dans la bouteille A, où alors il ne reſtera plus que 5 pintes, comme vous voyez en D, & verſez les trois pintes de la bouteille C, dans la bouteille B, où il y aura par conſéquent 3 pintes de vin, comme vous voyez en E. Puis ayant rempli la bouteille C, du vin de la bouteille A, où il ne reſtera

	8.	5.	3.
	A.	B.	C.
	8.	o.	o.
D.	5.	o.	3.
E.	5.	3.	o.
F.	2.	3.	3.
G.	2.	5.	1.
H.	7.	o.	1.
I.	7.	1.	o.
K.	4.	2.	3.

plus que 2 pintes, comme vous voyez en F, achevez de remplir la bouteille B, du vin qui est dans la bouteille C, où il ne restera plus qu une pinte, comme vous voyez en G. Enfin ayant versé le vin de la bouteille B, dans la bouteille A, où il se trouvera 7 pintes, comme vous voyez en H, versez la pinte de vin qui est en C, dans la bouteille B, où il y aura par conséquent une pinte, comme vous voyez en I, & remplissez la bouteille C, du vin de la bouteille A, où il ne restera que 4 pintes, comme il étoit proposé, & comme vous voyez en K.

PROBLEME XLIII.

Une personne a une bouteille de douze pintes pleine de vin : il en veut donner 6 pintes au Frere quêteur ; il n'a pour les mesurer que deux autres bouteilles, l'une de sept pintes, & l'autre de cinq. Que doit-il faire pour avoir les six pintes dans la bouteille de sept pintes?

CE problême est la même chose que le précédent, on l'exécutera aussi de la même maniere. Soit nommée D la bouteille de 12 pintes, S celle de sept pintes, & C celle de cinq pintes. La bouteille D est pleine, & les deux autres S, C, sont vuides, comme on voit en G. Remplissez la bouteille C, du vin qui est en D, & la bouteille D ne contiendra plus que 7 pintes, comme on voit en H. Puis versez dans S le vin que contient la bouteille C, qui demeurera vuide, & la bouteille S contiendra 5 pintes, comme on voit en I. Ensuite ayant rempli C, avec le vin qui est en D, la bouteille D ne contiendra plus que 2 pintes, la bouteille

bouteille S, en contiendra 5, & la bouteille C sera pleine, comme on voit en K : après cela versez de la bouteille C, du vin dans la bouteille S, pour la remplir, & la bouteille D ne contiendra encore que deux pintes, la botueille S en contiendra sept, & la bouteille C n'en contiendra plus que trois, comme on voit en L. Cela étant fait, vuidez S en D, & C en S, & il y aura neuf pintes en D, trois pintes en S, & C sera vuide, comme on le voit en M. Ensuite remplissez C de la bouteille D, & de C versez en S pour la remplir ; alors il y aura quatre pintes en D, sept pintes en S, & une pinte en C, comme vous voyez en N. Cela fait, remettez les sept pintes de S dans D, & la pinte de C dans S, & D contiendra onze pintes, S en contiendra une, & C sera vuide, comme on le voit en P. Enfin ayant rempli de la bouteille D la bouteille C, qui contient cinq pintes ; & ayant versé ces cinq pintes de C dans la bouteille S, qui en contient déja une, on trouvera que D contient six pintes, & que S en contient aussi six ; ainsi on est parvenu à ce qu'on souhaitoit.

	12.	.	5.
	D.	S.	C.
G.	12.	0.	0.
H.	7.	0.	5.
I.	7.	5.	0.
K.	2.	5.	5.
L.	2.	7.	3.
M.	9.	3.	0.
N.	4.	7.	1.
P.	11.	1.	0.
Q.	6.	6.	0.

PROBLEME XLIV.

Partager à trois personnes vingt-un tonneau, dont il y en a sept vuides, sept pleins, & sept demi-pleins; de telle maniere que ces trois personnes ayent autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

CEtte question peut être résolue en deux manieres. On voit d'abord que chacune de ces personnes doit avoir sept tonneaux. On peut partager 7 en 3 parties, 2, 2, 3, qui prises ensemble font 7. Ces trois nombres servent à la premiere solution de la question.

Premiere solution.

Le premier de ces nombres 2 doit être appliqué à la premiere personne, qui prendra 2 tonneaux pleins, 2 tonneaux vuides, & par conséquent 3 à moitié pleins, pour en avoir 7. Le second nom-

	pleins.	*vuides.*	$\frac{1}{2}$ *pleins.*
1e Perf.	2	2	3
2e Perf.	2	2	3
3e Perf.	3	3	1

bre 2 s'appliquera à la deuxieme personne, qui prendra, comme la premiere, 2 tonneaux pleins, 2 vuides, & 3 demi-pleins. Enfin le troisieme nombre 3 s'appliquera à la troisieme personne, qui prendra 3 tonneaux pleins, 3 tonneaux vuides, & un tonneau demi-plein, pour en avoir 7. De cette maniere, ces trois personnes auront autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

Le même nombre 7 peut être encore partagé en 3 autres parties, 3, 3, 1, qui prises ensemble font 7. Ces trois nombres servent à la deuxieme solution de la question.

Deuxieme solution.

Le premier de ces nombres 3 s'appliquera à la premiere personne, qui prendra 3 tonneaux pleins, 3 vuides, & 1 à moitié plein, pour en avoir sept. Le deuxieme nombre 3 s'appliquera à la seconde personne, qui prendra ses tonneaux comme la premiere personne. Enfin le troisieme nombre 1 s'appliquera à la troisieme personne qui prendra un tonneau plein, un tonneau vuide, & cinq à moitié pleins, pour en avoir sept. Ainsi ces trois personnes auront autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

	pleins.	*vuides.*	$\frac{1}{2}$ *pleins.*
1e Perf.	3	3	1
2e Perf.	3	3	1
3e Perf.	1	1	5

On a mis ici deux tables, que l'on peut distinguer en colonnes perpendiculaires, & en colonnes horisontales. Les colonnes perpendiculaires marquent la qualité des tonneaux qui doivent être distribués à chacune des trois personnes, & les colonnes horisontales, ou transversales, marquent la quantité des tonneaux, eu égard à leur qualité, qui doivent être distribués à chaque personne.

Il est évident que les trois personnes ont chacune 7 tonneaux, comme il paroît en ajoutant ensem-

ble les nombres qui ſe trouvent dans une colonne horiſontale, & qui appartiennent à une ſeule perſonne. Il eſt aiſé de reconnoître qu'elles ont autant de vin l'une que l'autre, en ajoutant les tonneaux pleins, avec la moitié des tonneaux demi-pleins d'une part, & les tonneaux vuides avec la moitié reſtante des tonneaux demi-pleins, ou plutôt demi-vuides, d'autre part, pour la même perſonne. On fera la même obſervation ſur les exemples & les tables ſuivantes.

REMARQUES.

La regle générale pour réſoudre ces ſortes de queſtions, eſt de diviſer le nombre des tonneaux par le nombres des perſonnes. Si le quotient n'eſt pas un nombre entier, la queſtion eſt impoſſible : mais ſi le quotient eſt un nombre entier, il faut partager ce quotient en autant de parties qu'il y a de perſonnes, avec cette condition, que chacune de ces parties ſera plus petite que la moitié du quotient trouvé. Chaque perſonne prendra autant de tonneaux vuides que de pleins.

S'il étoit propoſé de partager 21 tonneaux à 4 perſonnes, la queſtion ſeroit impoſſible ; puiſqu'on ne peut diviſer exactement 21 par 4*. Mais ſi on propoſoit de partager à 4 perſonnes 24 tonneaux, avec les mêmes conditions ci-deſſus, la queſtion eſt très-poſſible ; car diviſant 24 par 4, il vient au quotient *6*, qui eſt un nombre entier, & *6* peut être diviſé en ces quatre parties 2, 2, 1, 1, qui ſerviront à la ſolution de la queſtion propo-

* Pour partager également à quatre perſonnes 21 tonneaux, il faudroit en donner $5\frac{1}{4}$ à chacune. On ne peut ainſi briſer un tonneau en pluſieurs pieces.

sée, selon la table qu'on a ajouté ici, où l'on voit

	pleins.	*vuides.*	*½ pleins.*	*½ vuides.*
1e Perf.	2	2	1	1
2e Perf.	2	2	1	1
3e Perf.	1	1	2	2
4e Perf.	1	1	2	2

que les quatre personnes ont autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

Cette question n'a qu'une seule solution, parce que le nombre 6 ne peut être partagé en 4 autres parties, telles que la plus petite soit moindre que la moitié de lui-même.

On peut encore partager 27 tonneaux à trois personnes, avec les mêmes conditions que l'on a supposé dans les autres exemples : car 27 peut être exactement divisé par 3, & le quotient est 9; mais ce nombre 9 peut être divisé en trois parties, dont chacune sera plus petite que la moitié de lui-même : ce qui se peut faire en trois manieres diffé-

	pleins.	*vuides.*	*½ pleins.*
1e Perf.	3	3	3
2e Perf.	3	3	3
3e Perf.	3	3	3

rentes : car 9 peut être premierement partagé en ces trois parties 3, 3, 3, dont la somme fait 9. La table qui est ci-dessus montre ce que chacune des trois personnes doit avoir de tonneaux tant pleins que vuides & demi-pleins.

Ce même nombre 9 peut en second lieu être

divisé en trois autres nombres 1, 4, 4, qui pris

	Pleins.	*vuides.*	$\frac{1}{2}$ *pleins.*
1e Pers.	1	1	7
2e Pers.	4	4	1
3e Pers.	4	4	1

ensemble font 9. Les trois personnes seront partagées de la maniere qu'on le voit dans cette table. Enfin ce nombre 9 peut être partagé en ces trois autres nombres, 2, 3, 4, dont la somme est 9,

	pleins.	*vuides.*	$\frac{1}{2}$ *pleins.*
1e Pers.	2	2	5
2e Pers.	3	3	3
3e Pers.	4	4	1

& les trois personnes seront partagées comme il est marqué dans la table qu'on a ici ajouté.

On voit dans ces trois dernieres tables que les trois personnes ont autant de tonneaux & de vin l'une que l'autre.

PROBLEME XLV.

Quinze Chrétiens & quinze Turcs se trouvent sur mer dans un même vaisseau ; il survient une furieuse tempête. Après avoir jetté dans l'eau toutes les marchandises, le pilote dit qu'il est encore nécessaire d'y jetter la moitié des personnes. Il les fait ranger de suite, & en comptant de neuf en neuf, il jette chaque neuvieme dans la mer, en recommençant à compter le premier du rang, lorsque le rang est fini : il se trouve

qu'après avoir jetté quinze personnes, les quinze Chrétiens sont restés. Comment a-t-il disposé les trente personnes pour sauver les Chrétiens ?

LA disposition de ces trente personnes se tirera de ces deux vers françois.

Mort, tu ne failliras pas,
En me livrant le trépas.

Il suffit de faire attention aux voyelles A, E, I, O, U, qui se trouvent dans les syllabes des mots qui composent ces deux vers. On doit supposer que A vaut 1, E vaut 2, I vaut 3, O vaut 4, & U vaux 5. On commencera à ranger des Chrétiens, puis des Turcs, & ainsi de suite, en mettant alternativement des Chrétiens & des Turcs, jusqu'à ce qu'on ait rangé les trente personnes. Cela étant supposé, l'O, qui est dans la premiere syllabe (mort) fait connoître qu'on doit ranger d'abord 4 Chrétiens; l'U, qui est dans la seconde syllabe (tu) montre qu'on doit ranger ensuite 5 Turcs; l'E, qui est dans la troisieme syllabe (ne) fait voir qu'on doit disposer 2 Chrétiens; l'A, de la quatrieme syllabe (fail) montre qu'on doit mettre ensuite 1 Turc; l'I de la cinquieme syllabe fait connoître qu'on doit ranger 3 Chrétiens, & ainsi des autres, en appliquant les voyelles de chaque syllabe aux nombres qu'on leur a attribué.

REMARQUE.

Au lieu des deux vers françois, on peut employer ce vers latins, où l'on trouve les mêmes voyelles dans le même ordre.

Populeam virgam mater regina ferebas.

On donnera ici plus d'étendue à ce problême, afin qu'il puisse être utile aux capitaines, qui ayant plusieurs soldats à punir, sont obligés de les faire décimer. Par ce moyen ils feront tomber le sort sur les plus coupables, en les rangeant de la maniere que nous allons enseigner.

La regle est d'écrire autant de zeros qu'il y a de personnes coupables, & commençant à compter par le premier zero de marquer avec une croix le quantieme qu'on voudra punir, & de faire la même chose en recommençant le rang, & passant les zeros marqués jusqu'à ce qu'on ait marqué le nombre qu'on souhaite punir. Il faudra disposer les soldats de la même maniere qu'on a rangé les zeros, & mettre les plus coupables au lieu où se trouveront les zéros marqués de la croix.

Par exemple, si trente-six soldats sont coupables, & qu'on en veuille punir six des plus coupables en les décimant, c'est-à-dire, en les comptant dix à dix, pour faire punir chaque dixieme, on les rangera comme on voit ces trente-six zeros rangés, & on aura soin de faire mettre les plus coupables à la place où l'on voit des croix sur les zeros.

```
o o o o o o o o o o o o o o o o o o
      +           +       +
o o o o o o o o o o o o o o o o o o
  +       +           +
```

Il est aisé d'appliquer cette régle à quelque nombre que ce soit, & à quelque quantité qu'on veuille rejetter d'un nombre déterminé.

On prétend que c'est en pratiquant cette regle, que Josephe, l'historien juif, resta seul avec un autre, de quarante & un qu'ils étoient dans une caverne, où ils s'étoient retirés après la prise de

Jotapata, par Vespasien. L'histoire en est assez curieuse pour la rapporter ici : je ne ferai que la copier de la préface de Bachet sur ses *problêmes plaisans & délectables*, après l'avoir conferé avec ce qu'en dit lui-même Josephe, dans son histoire de la guerre des juifs, liv. 3, chap. 14.

« Hegesipus, dit Bachet, rapporte au troisieme » livre de la prise de Jérusalem, la mémorable » histoire de Josephe, qui étant gouverneur dans » la ville de Jatapata, lorsqu'elle fut assiégée, & » un peu après emportée d'assaut, par Vespasien, » fut contraint de se retirer dans *une caverne qui* « *étoit au fond d'une fosse, où il trouva quarante* « *braves guerriers*, pour éviter la fureur des armes » victorieuses des Romains. Mais il fut exposé à » un plus grand péril parmi les siens, que parmi les » ennemis ; car comme il eut arrêté de s'aller rendre à la discrétion du vainqueur, ne pouvant » imaginer aucun autre moyen de se garantir de la » mort, il trouva ses soldats saisis d'une telle frénésie, qu'ils vouloient tous mourir, & s'entretuer les uns les autres, plutôt que de prendre ce » parti. Josephe s'efforça de les détourner d'une si » malheureuse entreprise ; mais ce fut en vain : car » rejettant tout ce qu'il put alléguer au contraire, » & persistant en leur opinion, ils en vinrent jusques-là que de le menacer que, s'il ne s'y portoit » volontairement, de l'y contraindre par force, & » de commencer par lui-même l'exécution de leur » tragique dessein. Alors sans doute c'étoit fait de » sa vie, s'il n'eût eu l'esprit de se défaire de ces » furieux, par l'artifice de mon vingt-troisieme problême : car feignant d'adhérer à leur volonté, il » se conserva l'autorité qu'il avoit sur eux, & par » ce moyen leur persuada facilement que, pour

» éviter le désordre & la confusion qui pourroient
» survenir en un tel acte, s'ils s'entre-tuoient à la
» foule, il valoit mieux se ranger par ordre en
» quelque façon, & commençant à compter par
» un bout, massacrer toujours le tantieme (l'au-
» teur n'exprime pas le quantieme) jusqu'à ce qu'il
» n'en demeurât qu'un seul, lequel seroit obligé
» de se tuer lui-même. Tous en étant demeurés
» d'accord, Josephe les disposa de cette sorte, &
» choisit pour lui une si bonne place, que la tue-
» rie étant continuée jusqu'à la fin, il demeura seul
» avec un autre, qu'il sauva apparemment de la
» même maniere, parce qu'il pouvoit en attendre
» une entiere & parfaite obéissance ».

Bachet nous instruit lui même, dans son vingt-troisieme problême, de la maniere dont Josephe a pu s'y prendre pour se sauver lui-même avec un de ses compagnons. Comme il y avoit quarante soldats avec Josephe dans cette caverne, ce qui faisoit en tout quarante & une personnes, on peut supposer qu'il ordonna que comptant de trois en trois on tueroit toujours le troisieme. Cela étant supposé, il est aisé de connoître par la regle, qu'il se mit le trente & unieme, & qu'il fit mettre en la sezieme place celui qu'il voulut sauver.

PROBLEME XLVI.

Trois choses ayant eté distribuées secretement à trois personnes, deviner celle que chacun aura pris.

QUe ces trois choses soient une bague, un écu, & un gand ; vous vous représenterez la bague par la lettre A, l'écu par E, & le gand par I. Que les trois personnes soient Pierre, Si-

mon & Thomas ; vous les regarderez dans leur place tellement rangés que l'un, comme Pierre, sera le premier, Simon le second, & Thomas le troisieme. Ayant fait ces dispositions en vous même, vous prendrez vingt-quatre jettons, dont vous donnerez un à Pierre, deux à Simon, & trois à Thomas ; vous laisserez les dix-huit autres sur la table : ensuite vous vous retirerez de la compagnie, afin que les trois personnes se distribuent les trois choses proposées sans que vous le voyiez. Cette distribution étant faite, vous direz que celui qui a pris la bague prenne, des dix-huit jettons qui sont restés, autant de jettons que vous lui en avez donné : que celui qui a pris l'écu prenne des jettons restés deux fois autant de jettons que vous lui en avez donné : enfin que celui qui a pris le gand, prenne sur le reste des jettons quatre fois autant de jettons que vous lui en avez donné [dans notre supposition Pierre en aura pris un, Simon quatre, & Thomas douze ; par conséquent il ne sera resté qu'un jetton sur la table]. Cela étant fait, vous reviendrez, & vous connoîtrez par ce qui sera resté de jettons la chose que chacun aura pris, en faisant usage de ce vers françois.

1 2 3 5 6 7
Par fer Cesar jadis devint si grand prince.

Pour pouvoir se servir des mots de ce vers, il faut sçavoir qu'il ne peut rester qu'un jetton, ou 2, ou 3, ou 5, ou 6, ou 7, & jamais 4 ; il faut de plus faire attention que chaque syllabe contient une des voyelles, que nous avons dit représenter les trois choses proposées : enfin il faut considérer ce vers, comme n'étant composé que de sept mots, & que la premiere syllabe de chaque

mot représente la premiere personne, qui est Pierre, & la seconde syllabe représente la seconde personne, qui est Simon. Cela bien conçu, s'il ne reste qu'un jetton, comme dans notre supposition, vous vous servirez du premier mot, ou plutôt des deux premieres syllabes. *Par fer*, dont la premiere qui contient A, fait voir que la premiere personne, ou Pierre, a la bague représentée par A; & la seconde syllabe, qui contient E, montre que la seconde personne, ou Simon, a l'écu représenté par E; d'où vous conclurez facilement que la troisieme personne, ou Thomas, a le gant.

S'il restoit 2 jettons, vous consulteriez le second mot *Cesar*, dont la premiere syllabe, qui contient E, feroit connoître que la premiere personne auroit l'écu représenté par E; & la seconde syllabe, qui contient A, montreroit que la seconde personne auroit la bague représentée par A: d'où il feroit aisé de conclure que la troisieme personne auroit le gant. En un mot, selon le nombre des jettons qui resteront, vous employerez le mot du vers qui sera marqué du même nombre.

REMARQUES.

Au lieu du vers françois qu'on a rapporté on peut se servir de ce vers latin.

1 2 3 5 6 7
Salve certa animæ semita vita quies.

Ce problême peut être exécuté un peu autrement qu'on vient de le faire, & on peut l'appliquer à plus de trois personnes : ceux qui voudront en être plus particulierement instruits, consulte-

ront Bachet, dans le vingt-cinquieme de ses *problêmes plaisans & délectables.*

PROBLEME XLVII.

Trois personnes ont un certain nombre d'écus. La premiere donne des siens aux deux autres autant qu'elles en ont chacune. Ensuite la seconde en donne aux deux autres autant qu'elles en ont chacune. Enfin la troisieme en donne aux deux autres autant qu'elles en ont chacune. Cette distribution étant faite, il se trouve que chaque personne a huit écus. On demande combien elles en avoient chacune.

LA premiere personne avoit 13 écus, la seconde 7, & la troisieme 4; ce qu'il est aisé de reconnoître en distribuant les écus de chaque personne, suivant ce qui est énoncé dans le problême.

REMARQUE.

L'agebre donne aisément la résolution de ce problême. Ceux qui commencent à l'apprendre, pourront s'exercer à la trouver, & à former d'autres problêmes sur ce modele. Comme si la premiere personne donne trois fois autant d'écus aux deux autres qu'elles en ont, &c. & qu'au lieu de déterminer le nombre égal d'écus que chaque personne a à la fin, ils le laissent indéterminé, ils trouveront des solutions à l'infini. Ils reconnoîtront aussi que ce problême quarante-septieme est le fondement du trentieme.

PROBLEME XLVIII.

Il se trouve trois personnes dans une compagnie, la seconde est plus âgée que la premiere de douze ans, la troisieme est plus âgée que la seconde de treize ans : leurs trois âges font le nombre de cent ans. On demande quel est l'âge de chaque personne.

IL faut ajouter les deux différences des âges donnés, qui sont ici 12 & 25 [car la troisieme personne ayant 13 ans plus que la seconde, il faut joindre la différence de ses années avec celle des années de la seconde]. La somme de ces deux différences est 37, qu'il faut ôter de la somme totale 100, le reste 63 sera divisé par 3, nombre des personnes dont on veut sçavoir les âges : le quotient 21 est l'âge de la premiere personne; par conséquent 33 est l'âge de la seconde, & 46 l'âge de la troisieme. Ces trois nombres 21, 33, 46, font ensemble 100.

PROBLEME XLIX.

Découvrir si un ouvrage que l'ouvrier assure être de pur or, est mêlé d'argent, sans l'endommager.

VItruve rapporte que le roi Hieron voulant faire faire une couronne d'or d'un poids considérable, donna la matiere à un orfevre. La couronne fut très-bien faite, & elle se trouva être d'un poids égal à l'or qui avoit été fourni : on appréhenda cependant que l'orfevre n'eût volé de l'or, & n'y eût mêlé de l'argent. Archimede fut

chargé de découvrir la fraude, ſans endommager la couronne; il le fit en plongeant entiérement la couronne dans un vaſe plein d'eau, & en peſant exactement la quantité d'eau qui en étoit ſortie, il plongea auſſi entierement dans le même vaſe plein d'eau deux maſſes, l'une d'or & l'autre d'argent, & peſa exactement la quantité d'eau qu'avoient fait ſortir du vaſe ces deux maſſes, qui y avoient été plongées l'une après l'autre, il trouva que la maſſe d'or pur avoit fait ſortir une plus petite quantité d'eau que la couronne d'or, & que la couronne d'or en avoit fait ſortir une plus petite quantité que la maſſe d'argent.

Le même auteur ne dit point quelle étoit la quantité de l'or, ni quel fut le raiſonnement d'Archiméde pour découvrir la tromperie de l'orfevre. Mais on peut ſuppoſer que la couronne peſoit 20 marcs; qu'ayant été plongée dans un vaiſſeau plein d'eau, elle en fit ſortir 13 marcs d'eau; que la maſſe d'or pur & d'égal poids n'en fit ſortir que 12 marcs d'eau; qu'enfin la maſſe d'argent en fit ſortir 18 marcs d'eau.

Cela ſuppoſé, on découvrira par la regle de fauſſe poſition, ou par quelques équations algébriques, que l'orfevre avoit mêlé 3 marcs & un tiers d'argent dans la couronne. Voyez l'*abrégé de l'arithmétique* d'Irſon, page 395, on y trouvera la ſolution de pluſieurs queſtions par algebre.

PROBLEME L.

Un boucher donne commiſſion d'acheter pour cent écus cent bêtes, ſçavoir, des bœufs, des veaux, des brebis & des cochons. Le commiſſionnaire lui amene cent bêtes: il a payé 9 écus de cha-

que bœuf, 1 écu de chaque veau, 30 sols de chachaque brebis, & 3 écus de chaque cochon. On demande combien il a amené de bœufs, de veaux, de brebis & de cochons.

CE problême est capable d'un grand nombre de résolutions; c'est ce qui fait qu'on ne peut déterminer précisément le nombre de chaque sorte de bêtes que le commissionnaire a amené. Il pourroit avoir amené 3 bœufs, 44 veaux, 52 brebis & un cochon, qui font en tout 100 bêtes: le prix des bœuf est 27 écus, le prix des veaux est 44 écus, le prix des brebis est 26 écus, & le prix du cochon est 3 écus: tous ces prix font ensemble 100 écus, selon les conditions du problême. On peut dire encore qu'il a amené 4 bœufs, 17 veaux, 76 brebis, & 3 cochons: ce qu'on pourra vérifier par le prix de chaque sorte de bêtes, qu'on a déterminé dans les conditions du problême: ou bien 5 bœufs, 5 veaux, 88 brebis, & deux cochons, &c.

PROBLEME LI.

QUESTION I.

Un particulier a fait marché avec un ouvrier pour creuser un puits de 20 toises de profondeur, à condition de lui donner 30 livres, quand il aura achevé ce puits. L'ouvrier tombe malade, après avoir creusé 12 toises. On demande combien il est dû à cet ouvrier.

IL est dû à cet ouvrier 11 livres & $\frac{1}{7}$. Pour résoudre cette question, & les autres de même nature, il faut faire une regle de trois, dont le premier

premier terme ſera la ſomme des toiſes de la progreſſion arithmétique depuis 1 juſqu'à 20, que l'on trouvera * être ici 210; le ſecond terme ſera la ſomme dont on eſt convenu, qui eſt dans cette queſtion 30 livres, & le troiſieme terme ſera la ſomme des termes depuis 1 juſqu'à 12, que l'on trouvera * être ici 78; car il eſt conſtant qu'il y a plus de peine à creuſer les toiſes plus avancées, que celles qui le ſont moins, & cela en proportion arithmétique.

* Par le probl. x art. 1, p. 59.

QUESTION II.

Un tailleur a pris ſix aulnes de drap qui a trois quarts de large, pour faire un habit complet : on veut ſçavoir combien il faut d'aulnes d'une étoffe qui n'a qu'une demi-aulne de large.

ON prendra neuf aulnes de cette étoffe, qui n'a qu'une demi-aulne de large. Cette queſtion paroît embarraſſante; il faut s'y conduire avec quelque précaution. Elle ſe réduit à une regle de trois inverſe, qu'on peut énoncer de cette façon. Si $\frac{3}{4}$ donnent 6 aulnes, combien $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$? On exprime la demi-aulne par $\frac{2}{4}$, afin que le troiſieme terme ſoit analogue au premier. Pour réſoudre cette queſtion ainſi énoncée, il ne faut point avoir égard au dénominateur 4, qui eſt le même dans les deux fractions, il ſuffit de multiplier 6 aulnes par 3, numérateur de la premiere fraction, & de diviſer le produit 18 par 2, numérateur de l'autre fraction.

REMARQUES.

Il y a certaines questions qui se résolvent par l'attention que l'on fait à la chose exprimée, & à la maniere dont elle est exprimée : on en donnera quelques exemples dans les articles suivans.

I.

Un rôtisseur achete 20 perdrix, 8 livres, à raison de 2 livres les cinq: un autre rôtisseur de ses voisins a besoin de perdrix, il le prie de lui en vendre quelques-unes au prix courant. Que doit faire le rôtisseur pour les vendre au même prix, & y gagner ? Il doit en faire deux parts, en séparant les dix meilleures d'avec les autres qui ne sont pas si bonnes. Il vendra la paire des meilleures une livre, & trois des moindres une livre aussi : ces cinq vaudront 2 livres, qui est le prix courant. De cette maniere le rôtisseur vendra 5 livres les dix perdrix grasses, & des dix moindres il en vendra neuf pour 3 livres ; de sorte qu'il lui restera une perdrix pour le gain.

II.

On demande le juste prix d'un cent pesant de cordage goudronné ; supposant que le cent pesant de chanvre coûte 16 livres, & qu'on paye 52 sols 6 deniers pour la peine de l'espader, peigner & filer. On suppose en second lieu que le cent pesant de chanvre diminue de 8 livres dans sa réduction, ou conversion en fil blanc, & qu'on donne 4 sols 9 deniers pour lapeine de goudronner

le cent pesant de fil blanc. On suppose en troisieme lieu que le cent pesant de fil blanc ne prend que 20 livres de goudron par cent ; que la livre de goudron vaut 8 deniers, & qu'on paye 16 sols pour la peine de le corder.

Solution.

Je mets en une somme 16 livres, & 52 sols 6 deniers, c'est-à-dire, le prix du chanvre & de sa façon, pour le réduire en fil blanc; cela fait 18 livres 12 sols 6 deniers: ce sera le prix de 92 livres de fil blanc seulement, à cause des 8 livres de déchet en le façonnant. Je dis: si 92 livres de fil blanc coûtent 18 livres 12 sols 6 deniers, combien coûteront 100 livres du même fil blanc? Il vient 20 livres 4 sols 10 deniers, & $\frac{16}{23}$ de denier, pour la valeur du cent de fil blanc prêt à goudronner.

Il ne reste donc plus qu'à ajouter à cette somme les 4 sols 9 deniers pour la peine de goudronner le cent pesant de fil blanc ; il faut encore y ajouter 13 sols 4 deniers pour les 20 livres de goudron à 8 deniers la livre : ces trois sommes ajoutées ensemble font 21 livres 2 sols 11 deniers $\frac{16}{23}$ de denier, pour le prix de 120 livres de fil goudronné.

Il faut ensuite dire : si 120 livres de fil goudronné coûtent 21 livres 2 sols 11 deniers, & $\frac{16}{23}$ de denier, combien coûteront 100 livres? Il viendra 17 livres 12 sols 5 deniers, & $\frac{103}{138}$ de denier, pour la valeur du cent pesant de fil goudronné, auquel ajoutant 16 sols pour la peine de le corder, on aura 18 livres 8 sols 5 deniers, & $\frac{193}{138}$ de denier,

pour la valeur juste du cent pesant de cordage goudronné.

Cet exemple est extrait de l'arithmétique universelle : on a cru qu'il étoit assez curieux pour trouver ici sa place.

PROBLEME LII.

Faire parcourir au cavalier du jeu des échets toutes les cases du damier, l'une après l'autre, sans entrer deux fois dans la même case.

ON sçait que le cavalier du jeu des échets a une marche toute particuliere ; il va, pour ainsi dire, en caracolant, & il passe d'une case d'un rang à une case d'un autre rang, en sautant par-dessus deux cases, & allant du blanc au noir, & du noir au blanc.

I.

Ce problême peut recevoir un grand nombre de solutions ; il est assez considérable pour avoir mérité l'attention de quelques grands géometres. Il est vrai qu'ils n'en ont point donné de solution générale : c'est ce qui marque la difficulté qu'il y a à la trouver ; ils en ont cependant communiqué quelques-unes particulieres : on ne rapportera ici que trois de ces solutions ; dans les deux premieres, on commence à faire partir le cavalier de la case d'un angle du damier, & dans la troisieme on commence à le faire partir de l'une des quatre cases qui sont au milieu du damier ; cette derniere maniere de résoudre le problême proposé est plus difficile à trouver que les autres.

La premiere est de M. de Montmort, auteur

de l'eſſai de l'analiſe ſur les jeux de haſard ; la ſeconde eſt de M. Moivre, Anglois ; la troiſieme eſt de M. de Mairan, directeur de l'académie royale des ſciences, * à qui je dois le problême, & les trois ſolutions qu'on trouve ici.

* 1722.

Les tables ſuivantes repréſentent un damier ; on a mis des nombres dans les caſes que le cavalier doit parcourir l'une après l'autre. Ainſi dans la maniere de M. Montmort, le cavalier ſe place d'abord ſur la premiere caſe d'en haut, qui eſt au côté gauche : de-là on le fait paſſer à la troiſieme caſe du ſecond rang horiſontal, où l'on a marqué 2 ; enſuite on le fait ſauter dans la cinquieme caſe du premier rang horiſontal marqué 3 ; après on le fait paſſer dans la ſeptieme caſe du ſecond rang horiſontal marqué 4 : on continue à le faire aller dans les caſes qui ſont marquées des nombres ſelon leur

I. *de M. de Montmort.*

1	38	31	44	3	46	29	42
32	35	2	39	30	43	4	47
37	8	33	26	45	6	41	28
34	25	36	7	40	27	48	5
9	60	17	56	11	52	19	50
24	57	10	63	18	49	12	53
61	16	59	22	55	14	51	20
58	23	62	15	64	21	54	13

ordre naturel, juſqu'à ce qu'il ſoit parvenu à la cinquieme caſe du dernier rang horiſontal d'en bas, marquée 64, qui eſt la derniere où il arrive,

après avoir paſſé dans toutes les caſes les unes après les autres.

On fera la même obſervation dans les deux autres tables; on ſuivra l'ordre naturel des nombres, pour conduire le cavalier dans toutes les caſes.

II. *de M. de Moivre.*

34	49	22	11	36	39	24	1
21	10	35	50	23	12	37	40
48	33	62	57	38	25	2	13
9	20	51	54	63	60	41	26
32	47	58	61	56	53	14	3
19	8	55	52	59	64	27	42
46	31	6	17	44	29	4	15
7	18	45	30	5	16	43	28

III. *de M. de Mairan.*

40	9	26	53	42	7	64	29
25	52	41	8	27	30	43	6
10	39	24	57	54	63	28	31
23	56	51	60	1	44	5	62
50	11	38	55	58	61	32	45
37	22	59	48	19	2	15	4
12	49	20	35	14	17	46	33
21	36	13	18	47	34	3	16

Il ſuffit de jetter les yeux ſur ces trois tables, pour connoître la marche qu'on doit faire tenir au cavalier, lorſqu'on l'a placé ſur l'une des caſes marquées 1. On peut choiſir telle autre caſe qu'il plaira, & rechercher ſoi-même par quelles caſes paſſera le cavalier, pour les lui faire parcourir toutes l'une après l'autre, quand on l'aura placé ſur la caſe qui aura été choiſie.

II.

Premiere maniere.

Pour exécuter ce problême ſur un damier, il faut mettre un jetton ſur chaque caſe, en ſorte que toutes les caſes blanches & noires ſoient couvertes de jettons. On commencera par ôter le jetton de la caſe où l'on placera d'abord le cavalier, & à meſure qu'on le fera entrer dans une autre caſe, on ôtera le jetton qui la couvre. Ainſi on ſera ſûr d'avoir fait parcourir toutes les caſes au cavalier, quand tous les jettons auront été levés.

Seconde maniere.

Au lieu de couvrir d'abord de jettons toutes les caſes, on peut ne couvrir chaque caſe, qu'à meſure qu'on y fait paſſer le cavalier, & quand toutes les caſes ſeront couvertes, on ſera aſſuré d'avoir exécuté le problême.

III.

La méthode de M. Moivre a paru la plus ſimple; c'eſt ce qui a engagé à la developper : mais afin de faire voir l'ordre qu'il a ſuivi, je vais ſéparer & décompoſer, pour ainſi dire, les nombres

marqués dans les cases du second quarré précédent, & donner trois autres quarrés, par le moyen desquels j'espere qu'il sera aisé de retenir cette maniere, pour la pratiquer sur le champ, sans avoir besoin de consulter aucun modele.

Soit donc le quarré ABCD, divisé en 64 quarrés, qui représentent les cases d'un damier.

J'appelle les bandes ou les rangs AB, BD, AC, CD, *premieres bandes*, ou *premiers rangs en dehors*. J'appelle encore les bandes EG, KL, HM, IN, *secondes bandes*, ou *seconds rangs en dehors*, par rapport aux premiers rangs en dehors, qu'on vient d'indiquer ; & ainsi des autres, à mesure qu'on rentre dans le milieu du quarré.

		H					I		
A			22	11			24	1	B
E	21	10			23	12			G
							2	13	
	9	20							
							14	3	
	19	8							
K			6	17			4	15	L
C	7	18			5	16			D
		M					N		

1°. On peut placer indifféremment le cavalier sur la case de l'un des quatre angles du quarré. On commencera à le placer ici sur la case de l'angle

B, ſuivant le modele qui m'a été communiqué par M. de Mairan; de la caſe B marquée 1, on ira à la caſe marquée 2 dans la ſeconde bande IN; de-là on placera le cavalier à la caſe marquée 3 du premier rang en dehors BD, d'où ou viendra à la caſe marquée 4 du ſecond rang IN; puis à la caſe marquée 5 du premier rang en dehors CD, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à la caſe 12, en faiſant le tout du damier, ſans ſortir des deux premieres bandes en dehors.

2°. Quand on ſera parvenu à la caſe marquée 12, on recommencera un ſecond tour du damier dans le même ſens qu'on vient de le faire. Ainſi de la caſe marquée 12, on ira à la caſe marquée 13 du premier rang BD; de 13 on viendra à 14, dans le ſecond rang IN; puis à 15; enſuite à la caſe marquée 16 du premier rang en dehors CD, & ainſi des autres, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à la caſe marquée 24, qui eſt à côté de celle par laquelle on a commencé, en faiſant en même ſens qu'auparavant le tour du damier, ſans ſortir des deux premieres bandes en dehors, vers les extrêmités du damier.

REMARQUES.

Il nous a paru que le principe fondamental de la méthode de M. Moivre, étoit de remplir d'abord les caſes des deux premieres bandes en dehors, en tournant en même ſens autour du damier, comme on vient de le pratiquer, & comme on le pratiquera encore dans la ſuite, juſqu'à ce qu'on avertiſſe qu'il faut prendre un ſens contraire en tournant autour du centre du damier.

Pour éviter la confuſion dans le quarré ſuivant,

on n'a point marqué les vingt-quatre nombres marqués dans les cases du quarré précédent; mais à leur place on a mis des barres, pour faire connoître que ces cases ont été parcourues par le cavalier.

3°. Quand on est parvenu à la case marquée 24, on est forcé d'aller à la case marquée 25, mais de cette case on ira à celle qui est marquée 26 de la premiere bande BD, pour faire un troisieme tour en même sens qu'auparavant, & continuer à remplir les cases des deux premieres bandes en dehors, suivant le principe fondamental: de la case marquée 26, on viendra à la case marquée 27; puis à celle qui est marquée 28, ensuite à 29, & ainsi des autres, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la case marquée 37, qui suit immédiatement dans la même diagonale la case marquée 1, qui est celle par où l'on a commencé: ce qu'il est à propos d'observer sur le damier.

4°. De la case marquée 37, on ne peut aller qu'à la

	H				I				
A	34	49	—	—	36	39	24	—	B
E	—	—	35	50	—	—	37	40	G
P	48	33			38	25	—	—	Q
R	—	—				Z	41	26	S
	32	47					—	—	
	—	—					27	42	
K	46	31	—	—	44	29	—	—	L
C	—	—	45	30	—	—	43	28	D
	M						N		

case marquée 38 dans la troisieme bande PQ, ou à

celle qui est marquée Z dans la quatrieme bande RS; mais on préférera la case qui est marquée 38 dans la bande PQ pour satisfaire au principe fondamental, qui est de faire parcourir d'abord au cavalier les deux premieres bandes en dehors; car de la case Z on ne peut venir dans les deux premiers rangs BD, IN, pour recommencer un quatrieme tour en même sens que les autres: mais en portant le cavalier à la case marquée 38, on peut retourner à la premiere bande BD, en passant par la case marquée 39 de la premiere bande AB, & de-là à la case 40 de la bande BD, où l'on voit qu'on reprend le même sens que dans les autres tours.

5°. Ainsi de 38 on passera à 39, & de 39 on viendra à la case qui est marquée 40 dans le premier rang en dehors BD, d'où l'on passera à la case marquée 41 dans la seconde bande IN, puisque les autres cases sont remplies: on continuera à faire le tour en même sens que les autres, suivant la marche du cavalier dans les deux premieres bandes en dehors, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la case marquée 50 dans la seconde bande EG.

REMARQUE.

On a dit qu'on doit recommencer les tours en même sens: cela doit s'entendre que le cavalier étant parvenu dans les cases de la diagonale, où il a d'abord été placé, ou dans une case voisine, il faut le placer aussi-tôt qu'on le peut dans l'une des cases de la premiere bande en dehors BD, & suivre les extrêmités du damier dans les deux premieres bandes en dehors, en allant de la bande BD en DC, de DC en CA, & de CA en AB.

Pour éviter encore la confusion, on ne marquera pas les nombres marqués dans les quarrés précédens : on laissera les point du quarré précédent ; mais à la place des nombres qui y sont, on mettra des croix, pour faire connoître que toutes ces cases sont remplies, c'est-à-dire, couvertes de jettons, si on suit la seconde maniere d'exécuter le problême sur le damier, ou découvertes si on suit la premiere.

6°. Quand on sera parvenu à la case marquée 50, on ne peut plus recommencer le tour en même sens, puisque les cases des deux premieres bandes sont remplies ; on en commencera un autre en sens contraire, c'est à-dire, qu'on tournera autour du centre du damier, en s'éloigant de ce centre autant qu'on le pourra, & l'on ira vers la premiere bande en dehors AC, opposée à la bande BD.

		H				I			
A	+	+	—	—	+	+	—	—	B
E	—	—	+	50	—	—	+	+	G
P	+	+	64	57	+	+	—	—	Q
R	—	—	51	54	63	60	+	+	S
	+	+	58	61	56	53	—	—	
	—	—	55	52	59	62	+	+	
K	+	+	—	—	+	+	—	—	L
C	—	—	+	+	—	—	+	+	D
		M					N		

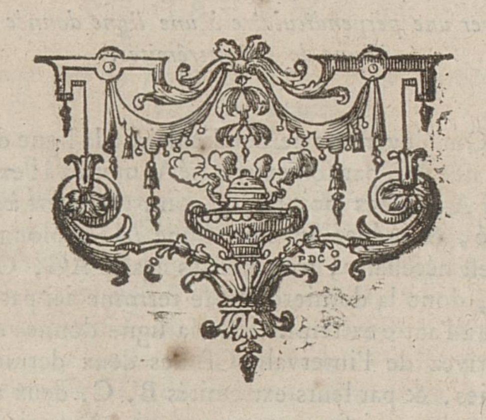
Ainsi de la case 50, on placera le cavalier à la case 51 ; de 51 on ira à 52 ; puis à 53, & ainsi de

ſuite, en tournant autour du centre du damier en ſens contraire aux premiers, & en s'éloignant du centre autant qu'il ſera poſſible.

REMARQUE.

On voit que les trois derniers nombres 62, 63, 64, ſont ici diſpoſés d'une autre maniere que dans la ſolution de M. Moivre : cette différente diſpoſition vient de ce qu'on a jugé à propos de continuer depuis la caſe 50 à faire les tours en ſens contraire, afin d'établir une même regle, & de pouvoir la pratiquer dans toute l'étendue de la ſolution du problême, quoiqu'avec quelque différence.

Cette méthode a paru facile à retenir, & à exécuter, quand on y fera quelque attention.





PROBLEMES DE GEOMETRIE.

LA géométrie n'eſt pas moins féconde que l'arithmétique ; mais elle n'eſt pas ſi aiſée dans ſes opérations, ni par conſéquent ſi agréable dans la réſolution de ſes problêmes : c'eſt pourquoi je ne mettrai que ceux qui me paroîtront les plus faciles & les plus agréables.

PROBLEME I.

Elever une perpendiculaire à une ligne donnée par l'une de ſes extrêmités.

I.

Pl. 1, Fig. 3.

POur élever une perpendiculaire à la ligne donnée AB, par ſon extrêmité A, mettez à l'extrêmité A une des pointes du compas ouvert à volonté, & prenez ſur cette ligne AD prolongée, s'il eſt néceſſaire, trois parties égales AC, CD, DB, dont la derniere DB ſe termine ici par hazard à l'autre extrêmité B de la ligne donnée AB. Décrivez de l'intervalle CB des deux dernieres parties, & par leurs extrêmités B, C, deux arcs de cercle, qui ſe coupent au point E: puis des deux points E, C, & avec la même ouverture du compas décrivez deux autres arcs de cercle, qui ſe coupent ici au point F. Par ce point F, & par

l'extrêmité donnée A, vous tirerez la droite AF, qui sera perpendiculaire à la ligne proposée AB.

Pl. 1, fig. 3.

II.

Si vous voulez tirer, par l'autre extrêmité B de la même ligne donnée AB, une ligne qui lui soit en même tems égale & perpendiculaire, divisez la ligne AB en trois parties égales aux points C,* D. Puis ayant trouvé le point F, comme il vient d'être enseigné, décrivez de l'extrêmité donnée B, & de l'intervalle AF, l'arc de cercle GHI, & portez sur cet arc la même ouverture du compas deux fois de G en H, & de H en I. Décrivez avec la même ouverture du compas & des deux points H, I, deux arcs de cercle qui se coupent ici au point K. Enfin menez la droite BK, elle sera égale & perpendiculaire à la ligne proposée AB.

* Voyez le problême III suivant.

PROBLEME II.

Mener par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée.

I.

Pour mener par le point donné C une ligne parallele à la ligne donnée AB, prenez à volonté sur cette ligne AB, deux points proche des deux extrêmités A, B, comme D, E: puis du point donné C & de l'intervalle DE, décrivez un arc de cercle vers F; ensuite du point E & de l'intervalle CD, décrivez un autre arc de cercle, qui rencontre ici le premier au point F. Par ce point F, & par le point donné C, vous menez la droire CF, qui sera parallele à la proposée AB.

Fig. 4.

II.

Si vous voulez que la ligne parallele ſoit égale à la ligne AB, au lieu de vous ſervir des deux points D, E, ſervez-vous des deux extrêmités A, B. Du point donné C, & de l'intervalle de la ligne donnée AB, décrivez un arc de cercle vers G: puis de l'extrêmité B, & de l'intervalle AC, décrivez un autre arc de cercle qui coupera le premier en G. Par ce point G, où ces deux arcs ſe coupent, & par le point donné C, menez la droite CG, elle ſera égale & parallele à la propoſée AB.

PROBLEME III.

Diviſer d'une même ouverture de compas une ligne donnée en autant de parties égales qu'on voudra.

Pl. 1, F. 4 & 5.

SI vous voulez diviſer la ligne donnée AB en quatre parties égales, prolongez-la autant qu'il eſt néceſſaire, comme ici juſqu'en E, en ſorte que AB, BC, CD, DE, ſoient quatre parties égales chacune à AB. Faites ſur ces parties les quatre triangles équilatéraux ABF, BCG, CDH, DEI; ce qui peut ſe faire avec la même ouverture de compas. Enfin menez les droites AG, AH, AI: alors la ligne HM repréſentera une des quatre parties de la ligne AB, la ligne DM en repréſentera par conſéquent trois, & la ligne FK ou BK en repréſentera deux.

Mais la ſeule ligne AI ſuffit: car elle retranche la ligne B1, égale à la quatrieme partie de la ligne AB, la ligne C2 égale à la moitié de la même ligne AB, & la ligne D3, égale aux trois quarts de la même ligne AB.

La

La ligne AH ſert pour diviſer la ligne propoſée AB en trois parties égales; car la ligne GL en repréſente une, & la ligne CL en repréſente par conſéquent deux. Mais la même ligne AI ſuffit auſſi pour la diviſion de la ligne donnée AB en trois parties égales, parce que la ligne BN en repréſente une, & la ligne CO en repréſente deux. D'où il ſuit que la ligne HO en repréſente auſſi une.

PROBLEME IV.

Faire un angle qui ſoit la moitié, ou le double d'un angle donné.

Pl. 3, fig. 6.

PRemierement, pour faire un angle ADG, qui ſoit la moitié de l'angle donné ABC; de ſon ſommet B comme centre, & de l'intervalle BD pris à volonté ſur l'un des côtés AB prolongé à diſcrétion, décrivez le demi-cercle DEF. Puis par le point D & par le point E, où le demi-cercle coupe l'autre côté BC de l'angle donné, menez la ligne DG: l'angle ADG ſera la moitié de l'angle donné ABC.

Secondement, pour faire un angle ABC, qui ſoit double de l'angle donné ADG; d'un point B comme centre pris à volonté ſur l'un des côtés AD, & de l'intervalle BD diſtance de B, juſques au ſommet D de l'angle donné, décrivez le demi-cercle DEF. Puis par le point B & par le point E, où le demi-cercle coupe l'autre côté de l'angle donné, menez la ligne BC: l'angle ABC ſera double de l'angle donné ADG.



PROBLEME V.

Faire un angle qui ſoit le tiers, ou le triple d'un angle donné.

Pl. 3, fig. 7.

PRemierement, pour faire un angle égal à la troiſieme partie de l'angle donné ABC, de ſon ſommet B comme centre, & de l'intervalle BD pris à volonté, décrivez le demi-cercle DEF; puis appliquez une regle bien droite au point E; en ſorte que ſa partie GI, terminée par la circonference du demi-cercle DEF, & par la ligne AD prolongée, ſoit égale au demi-diametre BD, ou BE. Après cela menez la droite GE, qui fera au point G, l'angle AGH égal à la troiſieme partie de l'angle ABC. L'arc ID ſera auſſi égal à la troiſieme partie de l'arc EF, qui meſure l'angle donné ABC.

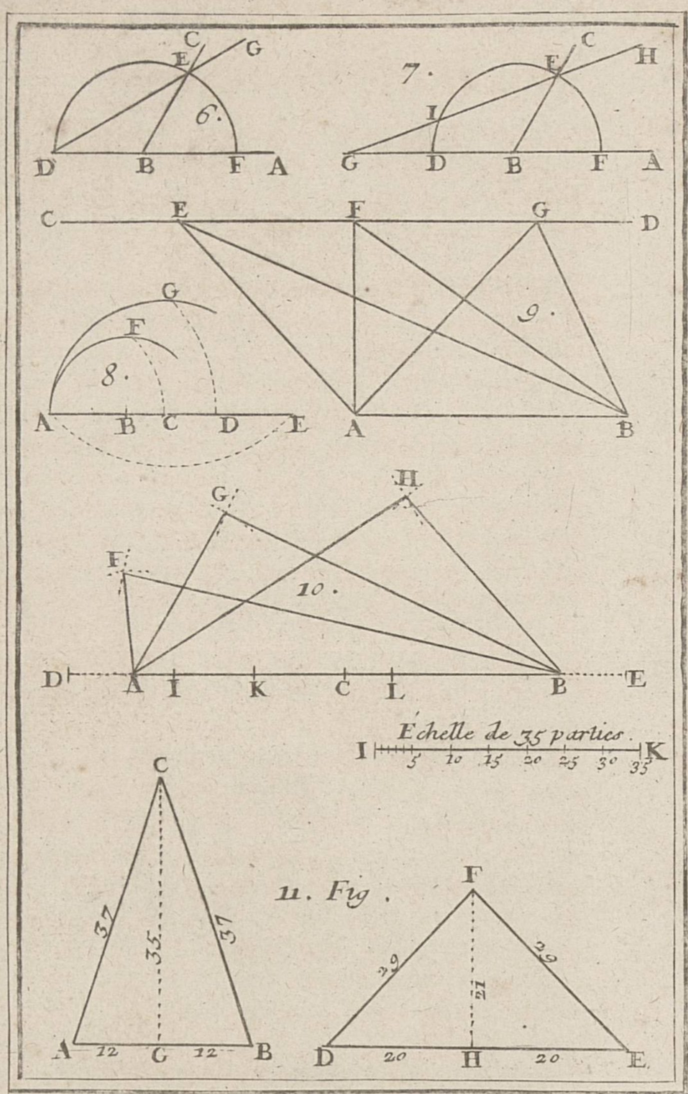
Secondement, pour faire un angle égal au triple de l'angle donné AGH; ayant pris à diſcrétion ſur la ligne GH, le point I, portez la longueur IG ſur la ligne AG, de I en B, pour décrire du point B, & de l'intervalle IB, le demi-cercle DEF, qui paſſera par le point I, & donnera ſur la ligne GH le point E. Par ce point E & par le point B, vous tirerez la droite BE, qui fera l'angle ABC, triple du donné AGH.

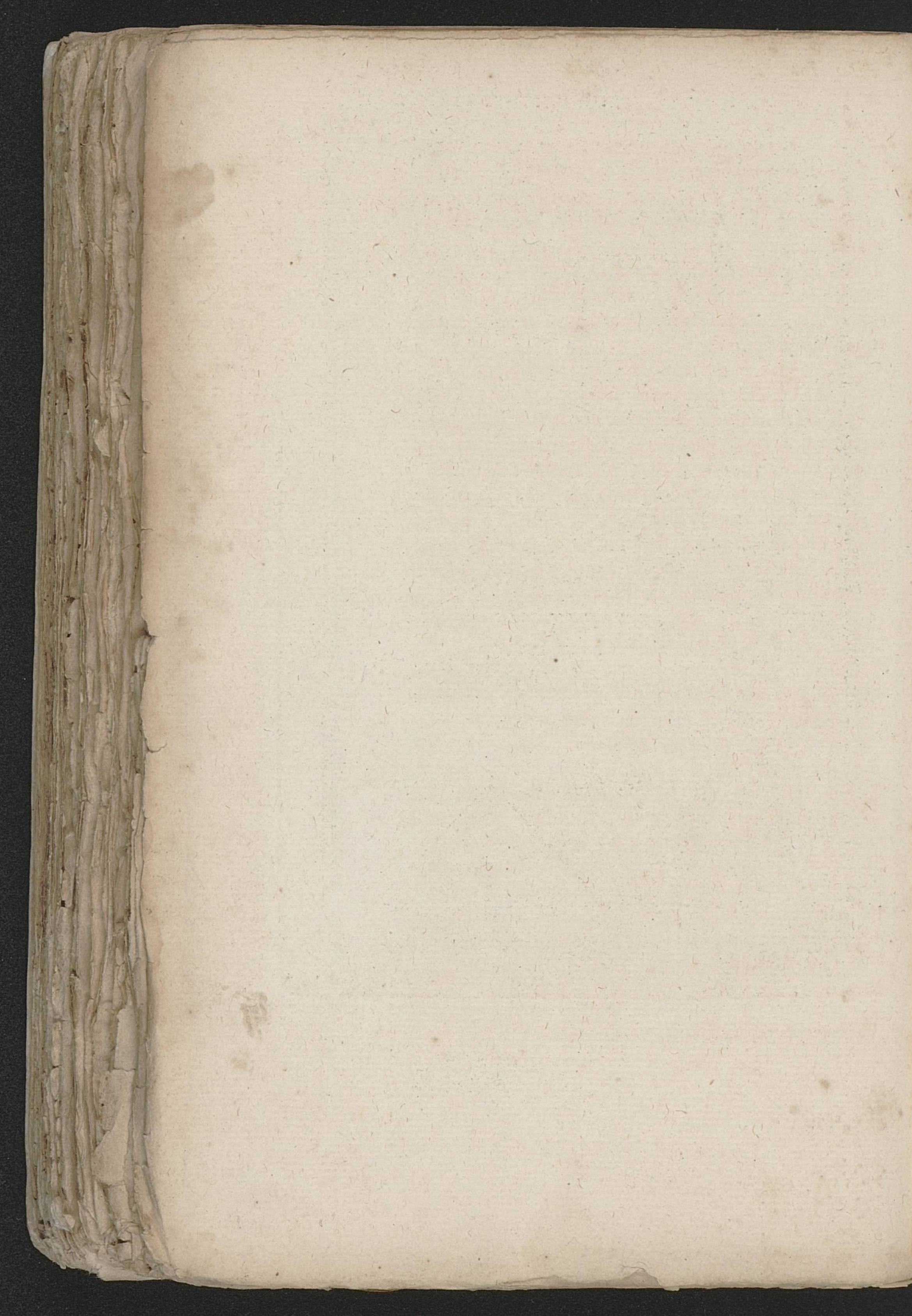
PROBLEME VI.

Trouver à deux lignes données une troiſieme, & autant d'autres proportionnelles qu'on voudra.

Fig. .

POur trouver aux deux lignes données AB, AC, une troiſieme proportionnelle, décrivez


6.
7.
8.
9.
10.
Échelle de 35 parties.
11. Fig.



de l'extrêmité B de la premiere AB, par l'autre extrêmité A, l'arc de cercle AF, ſur lequel ayant mis la longueur de la ſeconde AC, de A en F, portez la même longueur ſur la ligne AC, prolongée autant qu'il ſera beſoin de F en D, & la ligne AD ſera troiſieme proportionnelle aux deux lignes données AB, AC.

De même pour trouver aux trois lignes AB, AC, AD, une quatrieme proportionnelle, ou ce qui eſt la même choſe, aux deux AC, AD, une troiſieme proportionnelle, décrivez de l'extrêmité C de la premiere AC, par l'autre extrêmité A, l'arc de cercle AG, ſur lequel ayant mis la longueur de l'autre ligne AD, de A en G, portez la même longueur AD ſur la ligne AD prolongée, de G en E, & la ligne AE ſera celle qu'on cherche : & ainſi de ſuite.

PROBLEME VII.

Décrire ſur une ligne donnée autant de triangles différens qu'on voudra, dont les aires ſoient égales.

SI la ligne donnée eſt AB, tirez à diſcrétion la parallele CD, ſur laquelle ayant pris à volonté autant de points différens que vous voudrez de triangles égaux, comme E, F, G, pour trois triangles, menez de ces trois points E, F, G, aux extrêmités A, B, de la ligne donnée AB, des lignes droites, & vous aurez les trois triangles égaux AEB, AFB, AGB, ſur la même baſe AB.

Pl. 3, fig. 9.

PROBLEME VIII.

Décrire ſur une ligne donnée autant de triangles différens qu'on voudra, dont les contours ſoient égaux.

Pl. 3, fig. 10.

SI la baſe donnée eſt AB, diviſez-la en deux également au point C, & prolongez-la de part & d'autre à volonté en D, & en E, en ſorte que les deux lignes CD, CE, ſoient égales entre elles. Toute la ligne DE ſera priſe pour la ſomme des deux côtés de chaque triangle, qu'on décrira ſur la baſe donnée AB en cette ſorte.

Decrivez du point A, avec une ouverture de compas un peu plus grande que AD, un arc de cercle vers F. Puis ayant porté cette ouverture ſur la ligne DE, de D en I, décrivez du point B, & de l'intervalle IE, un autre arc de cercle, qui coupera le premier au point F. Ce ſera le ſommet du premier triangle ABF.

Décrivez pareillement du point A, avec une ouverture de compas un peu plus grande que AF, un arc de cercle vers G. Puis ayant porté cette ouverture ſur la ligne DE, de D en K, décrivez du point B, & de l'intervalle KE, un autre arc de cercle, qui coupera le premier au point G. Ce ſera le ſommet du ſecond triangle AGB, dont le contour ſera égal au contour du premier AFB.

Si vous voulez un troiſieme triangle, décrivez encore du point A un arc de cercle vers H, avec une ouverture de compas un peu plus grande que AG. Puis ayant porté, comme auparavant, cette ouverture ſur la ligne DE, de D en L, décrivez du point B, & de l'intervalle LE un autre arc de

cercle, qui coupe ici le premier au point H. Ce ſera le ſommet du troiſieme triangle AHB, dont le contour ſera le même que celui des deux précédens. Ainſi des autres.

Vous remarquerez que les ſommes F, G, H, de tous ces triangles, ſe trouvent ſur la circonférence d'une ellipſe, dont le grand axe eſt DE, & les deux foyers ſont A, B.

PROBLEME IX.

Décrire deux triangles iſoſceles différens, de même aire & de même contour.

AYant préparé un échelle IK, diviſée en autant de parties égales qu'il conviendra, prenez ſur la baſe AB, les deux ſegmens GA, GB, chacun de 12 parties priſes ſur l'échelle; élevez au point G ſur la même baſe AB la perpendiculaire GC de 35 des mêmes parties; tirez les deux lignes égales AC, BC, & vous aurez le premier triangle iſoſcele ACB, dont chacun des côtés égaux AC, BC, ſe trouvera de 37 parties, comme on le connoîtra en ajoutant le quarré 144 du ſegment AG, avec le quarré 1225 de la perpendiculaire CG, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 1369.

Pl. 3, fig. 11.

Pour avoir un triangle de même aire & de même contour que le précédent, prenez ſur la baſe DE, les deux ſegmens HD, HE, chacun de 20 parties, & ayant élevé au point H ſur la baſe DE la perpendiculaire HF de 21 parties, tirez les lignes égales EF, DF, dont chacune ſe trouvera de 29 parties, comme on le connoîtra en ajoutant le quarré 400 du ſegment DH, avec le quarré 441

de la perpendiculaire HF, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 841.

Ainſi vous aurez le triangle iſoſcele DEF, dont le contour 98 eſt égal au contour, c'eſt-à-dire, à la ſomme des trois côtés du premier triangle iſoſcele ABC, & dont l'aire, ou le contenu 420 eſt égal au contenu du premier triangle iſoſcele ABC, comme on le connoît en multipliant DH par FH, ou 20 par 21 : car le produit 420 qui en vient pour l'aire du triangle DEF, eſt le même que celui qui vient en multipliant AG par CG, ou 12 par 35, pour l'aire du triangle ABC.

On peut décrire autant de couples qu'on voudra de triangles iſoſceles de même aire & de même contour, en trouvant en nombres ces couples; ce qui ſe peut faire en cherchant les deux nombres générateurs des moitiés ACG, DFH, qui ſont deux triangles rectangles égaux. Ces nombres générateurs connus ſerviront à en trouver d'autres, par le moyen deſquels on trouvera deux triangles rectangles, comme il a été enſeigné au *problême IX d'arithméthique*, *pag.* 50. Voici la méthode de trouver les nombres générateurs des deux triangles rectangles ACG, DFH, qui eſt générale pour tout autre triangle rectangle, dont on connoît les trois côtés, ou au moins deux.

Pour trouver les nombres générateurs du triangle ACG, ajoutez l'hypoténuſe 37 à l'un des côtés 12, vous aurez le quarré 49, dont la racine eſt 7, que vous garderez. Ajoutez encore l'hypoténuſe 37 à l'autre côté 35, pour avoir une ſomme 72, dont la moitié 36 a pour racine quarrée 6, qui eſt un des nombres générateurs. Enfin prenez la différence de 6 à 7, & vous aurez 1 pour l'autre nombre générateur du triangle ACG.

Il faut suivre la même opération pour trouver les nombres générateurs du triangle DFH : ajoutez l'hypoténuse 29 au côté 20, vous aurez encore le quarré 49, dont la racine est 7, que vous garderez : ajoutant encore la même hypoténuse 29 à l'autre côté 21, vous aurez 50, dont la moitié 25 a pour racine quarrée 5, qui est un des nombres générateurs. Enfin prenez la différence de 5 à 7, & vous aurez 2 pour l'autre nombre générateur du triangle DFH.

Ainsi les nombres générateurs du triangle ACG, sont 6, 1 : & les nombres générateurs du triangle DFH sont 5, 2.

A présent *pour avoir autant qu'on voudra de couples de triangle de même aire & de même contour*, il faut multiplier les nombres générateurs 6, 1, 5, 2, par un même nombre tel qu'il plaira : si on les multiplie par 2, ou aura 12, 2, & 10, 4 pour nombres générateurs de deux autres triangles rectangles de même aire : car multipliant 12 par 2, on aura 24, dont le double 48 sera AG, un des côtés du nouveau triangle ; puis ajoutant 144, 4 quarrés de 12, 2, on aura la somme 148 pour l'hypoténuse AC. Enfin ôtant 4, quarré de 2, de 144, quarré de 12, on aura 140 pour l'autre côté CG : ainsi le triangle rectangle ACG, dont les côtés étoient 37, 35, 12, se trouvera transformé en un autre, dont les côtés seront 148, 140, 48. *Pour avoir un triangle isoscele*, il ne faut que prolonger la base AG jusqu'en B, faire GB égale à AG, qui est ici de 48 parties, & tirer la ligne CB, qui sera de 148 parties comme AC. Ce triangle isoscele ainsi supposé, aura 392 parties de contour & 6720 de superficie.

De même pour avoir l'autre nouveau triangle,

dont les nombres générateurs ſont 10, 4, on multipliera 10 par 4, & l'on aura 40, dont le double 80 ſera le côté DH; enſuite ajoutant 100 & 16, quarrés de 10, 4, on aura 116 pour l'hypoténuſe DF, & ôtant 16, quarré de 4, de 100, quarré de 10, on aura 84 pour l'autre côté FH : ainſi le triangle rectangle DFH, dont les côtés étoient 29, 21, 20, ſe trouvera transformé en un autre, dont les côtés ſeront 116, 84, 80. Pour achever le triangle iſoſcele, il ne faut que prolonger DH juſqu'en E, en faiſant DE égale à DH, qui eſt ici de 80 parties, & tirer la ligne FE, qui ſera de 116 parties, comme DF. Ce nouveau triangle iſoſcele aura 392 parties de contour, & 6720 de ſuperficie : par conſéquent il ſera de même aire & de même contour que l'autre.

On peut s'exercer, en multipliant les nombres générateurs 6, 1 : 5, 2, par un tel autre nombre qu'on voudra.

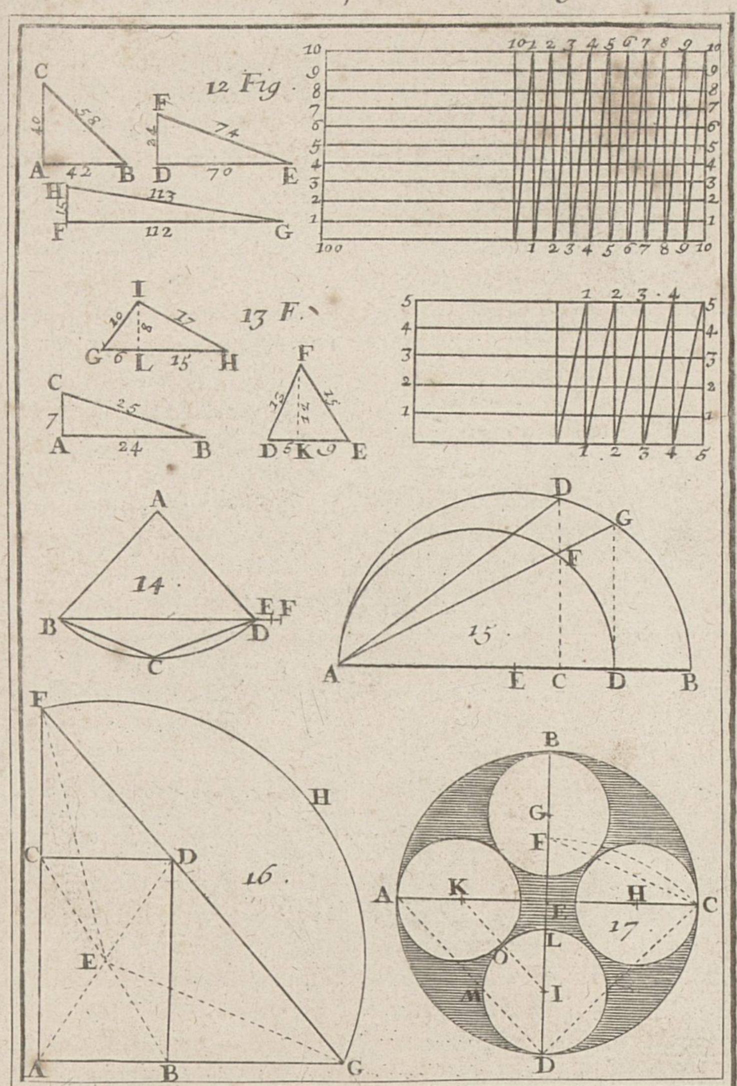
PROBLEME X.

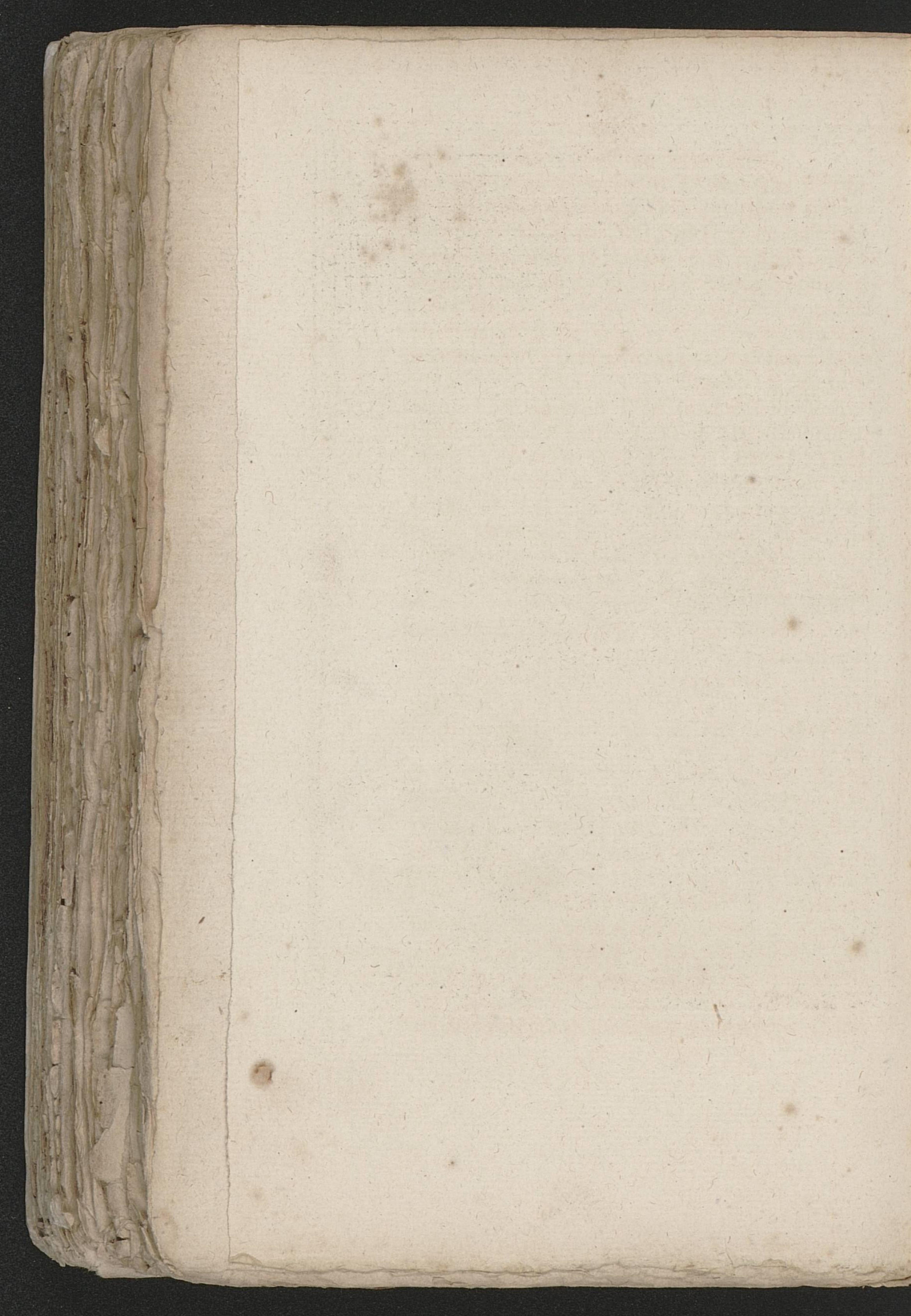
Décrire trois différens triangles rectangles, dont les aires ſoient égales.

Pl. 4, fig. 12.

AYant préparé une échelle diviſée en parties égales, prenez la baſe AB de 42 parties, & la hauteur ou perpendiculaire AC de 40; l'hypoténuſe BC du premier triangle rectangle ABC ſe trouvera de 58 parties, comme on le connoîtra en ajoutant le quarré 1764 de la baſe AB, au quarré 1600 de la hauteur AC, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 3364.

Prenez enſuite la baſe DE du ſecond triangle rectangle DEF de 70 parties, & la hauteur DF de


12 Fig.
13 F.
14.
15.
16.
17.



24; l'hypoténuſe EF ſe trouvera de 74 parties, comme on le connoîtra en ajoutant enſemble le quarré 4900 de la baſe DE, & le quarré 576 de la hauteur DF, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 5476. L'aire de ce ſecond triangle rectangle DEF ſera égale à celle du premier ABC, chacune étant 840, comme on le connoît en multipliant la baſe par la hauteur, & en prenant la moitié du produit.

Enfin prenez la baſe FG du troiſieme triangle rectangle FGH, de 112 parties, & la hauteur FH de 15; l'hypoténuſe BC ſe trouvera de 113 parties, comme on le connoîtra en ajoutant enſemble le quarré 12544 de la baſe FG, le quarré 225 de la hauteur FH, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 12769. L'aire de ce troiſieme triangle rectangle FGH ſera auſſi 840.

Ces trois triangles rectangles ont été trouvés en nombres entiers, par ce canon que nous avons tiré de l'algébre, qui nous apprend que pour trouver en nombres entiers, trois triangles rectangles égaux, on doit auparavant trouver trois nombres qui ſerviront de nombres générateurs, en cette ſorte.

Si on ajoute le produit de deux nombres quelconques à la ſomme de leurs quarrés, on aura le premier nombre. La différence de leurs quarrés ſera le ſecond: & la ſomme de leur produit & du quarré du plus petit, ſera le troiſieme nombre générateur.

Si de ces trois nombres ainſi trouvés, on forme trois triangles rectangles, ſçavoir, l'un des deux premiers, l'autre des deux extrêmes, & le troiſieme du premier & de la ſomme des deux autres, ces trois triangles rectangles ſeront égaux entr'eux.

* Voyez le probl. IX d'arithm. p. 50.

On peut trouver en nombres rompus autant d'autres triangles rectangles qu'on voudra, dont les aires seront égales entr'elles & à l'un des trois précédens, en trouvant par le moyen de ce triangle rectangle un autre triangle rectangle égal, en cette sorte.

Formez de l'hypoténuse du triangle rectangle proposé, & du quadruple de son aire, un autre triangle rectangle, que vous diviserez par le double du produit, qui viendra en multipliant l'hypoténuse du triangle rectangle proposé par la différence des quarrés des deux autres côtés du meme triangle rectangle, & vous aurez un triangle rectangle égal au proposé.

PROBLEME XI.

Décrire trois triangles égaux, dont le premier soit rectangle, le second soit acutangle, & le troisieme soit obtusangle.

Pl. 4, fig. 13.

AYant préparé, comme auparavant, une échelle divisée en parties égales, qui peuvent représenter des pieds, des toises, & tout ce qu'il vous plaira, prenez la base AB du triangle rectangle ABC de 24 parties, & la hauteur AC de 7; l'hypoténuse BC se trouvera de 25 parties, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble le quarré 576 de la base AB, & le quarré 49 de la hauteur AC, & en prenant la racine quarrée de la somme 625.

Prenez ensuite sur la base DE du triangle acutangle DEF, le segment KD de 5 parties, & le segment KE de 9; élevez du point K sur la base DE, la perpendiculaire KF de 12 parties: alors

le côté DF se trouvera de 13 parties, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble le quarré 25 du segment DK, & le quarré 144 de la hauteur FK, & en prenant la racine quarrée de la somme 169. L'autre côté se trouvera de 15 parties, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble le quarré 81 du segment KE, & le quarré 144 de la perpendiculaire KF, & en prenant la racine quarrée de la somme 225.

Enfin prenez sur la base GH du triangle obtusangle GHI, le segment LG de 6 parties, & le segment LH de 15; élevez du point L, sur la base GH, la perpendiculaire LI de 8 parties, alors le côté GI se trouvera de 10 parties, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble le quarré 36 du segment GL, & le quarré 64 de la hauteur IL, & en prenant la racine quarrée de la somme 100. Le côté HI se trouvera de 17 parties, comme on le connoîtra en ajoutant au quarré 225 du segment LH, le quarré 64 de la perpendiculaire LI, & en prenant la racine quarrée de la somme 289.

On connoît que le triangle ABC est rectangle en A, parce que la somme 625 des quarrés 49, 576, des deux côtés AC, AB, est égale au quarré du troisieme côté BC: que le triangle DEF, est acutangle, parce que la somme des quarrés de deux côtés quelconques est plus grande que le quarré du troisieme côté: enfin que le triangle GHI est obtusangle, & que l'angle I est obtus, parce que le quarré 441 de son côté opposé GH, qui est de 21 parties, est plus grand que la somme 389 des quarrés 100, 289, des deux autres côtés GI, HI.

Enfin on connoît que ces trois triangles ABC, DEF, GHI, sont égaux, c'est-à-dire, que leurs

aires ſont égales, parce qu'en multipliant la baſe AB par la hauteur AC, il vient le même produit qu'en multipliant la baſe DE par la hauteur FK, ou la baſe GH par la hauteur LI, ſçavoir 168, qui eſt le double de l'aire de chaque triangle, laquelle par conſéquent ſera 84. La perpendiculaire FK, & les trois côtés du triangle acutangle DEF, ſont dans une proportion continue arithmétique.

PROBLEME XII.

Trouver une ligne droite égale à ſon arc de cercle donné.

Pl. 4, fig. 14.

*Voyez le probl. III, p. 202.

POur trouver une ligne droite égale à l'arc de cercle BCD, dont le centre eſt A, & le rayon ou demi-diametre eſt AB, ou AD, diviſez * cet arc en deux également au point C. Tirez les cordes BC, CD, BD. Prolongez la corde BD en E, en ſorte que la ligne BE ſoit double de l'une des deux cordes égales BC, CD, c'eſt-à-dire, égale à la ſomme de ces deux cordes. Prolongez encore la ligne BE en F, en ſorte que la ligne EF ſoit égale à la troiſieme partie de la ligne DE, * & la ligne droite BF ſera à peu près égale à la courbe BCD. J'ai dit à peu près, parce que la ligne BF eſt tant ſoit peu moindre que l'arc BCD; mais la différence eſt ſi petite, lorſque l'arc BCD ne paſſe pas 30 degrés, qu'il ne s'en faut pas une partie de cent mille qu'on peut donner au rayon AB, ou AD.

REMARQUE.

Si l'arc BCD eſt préciſément de 30 degrés, ou la douzieme partie de la circonférence de tout le

cerle, & que le rayon AB, ou AC ſoit de 50000 parties, on connoîtra par la trigonométrie que chacune des deux cordes BC, CD, eſt de 13053 parties. Ainſi leur ſomme, ou la ligne BE ſera de 26106 parties, de laquelle ôtant la corde BD, qui ſe trouvera de 25882 parties, il en reſtera 224 pour la ligne DE, dont la troiſieme partie eſt 74 pour la ligne EF. Cette troiſieme partie étant ajoutée à la ligne BE, ou à 26106, la ſomme ſera 26180 pour la ligne BF, ou pour l'arc BCD. Enfin multipliant cet arc, ou 26180 par 12, on aura 314160 pour la circonférence du cercle. Ainſi nous ſçavons que quand le diametre d'un cercle eſt de 100000 parties, la circonférence eſt d'environ 314160 ſemblables parties, & par conſéquent que le diametre d'un cercle eſt à ſa circonférence à peu près comme 100000 eſt à 314160, ou comme 10000 à 31416.

Ce rapport ſert à *trouver la circonférence d'un cercle, dont on connoît le diamétre.* Il faut multiplier ce diametre par 31416, & diviſer le produit par 10000. Cette diviſion ſe fera en retranchant de ce produit quatre figures à la droite : les figures qui reſteront à la gauche, feront connoître la circonférence du cercle, & les figures retranchées ſeront le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur ſera 10000.

Pour connoître la circonférence d'un baſſin rond d'un jet d'eau, dont le diametre eſt, par exemple, de 64 pieds, on multiplera 64 par 31416, on retranchera quatre figures à la droite du produit 2010624, & l'on aura 201 pieds $\frac{624}{10000}$, pour la circonférence qu'on cherche.

Il faudra faire tout le contraire, ſi on veut *connoître le diametre d'un cercle, ou d'une boule*

par sa circonférence connue, c'est-à-dire, qu'il faudra multiplier cette circonférence par 100000; ce qui se fera en lui ajoutant vers la droite quatre zeros, & l'on divisera le produit par 31416.

Ainsi pour connoître le diametre d'une tour ronde, dont on sçait que le contour ou la circonférence mesurée en dehors par le moyen d'une longue corde, est de 154 pieds, on ajoutera quatre zeros à la droite de ce nombre 154, on divisera 1540000 par 31416, & l'on aura 49 pieds $\frac{616}{31416}$ pour le diametre qu'on cherche.

PROBLEME XIII.

Trouver entre deux lignes données, une, ou deux, ou trois moyennes proportionnelles.

I.

Pl. 4, fig. 15.

PRemierement, pour trouver entre deux lignes données AB, AC, une moyenne proportionnelle, partagez la plus grande AB en deux parties égales au point E. De ce point E, comme centre & de l'intervalle AE, ou EB, décrivez le demi-cercle ADB; portez ensuite de A en C la plus petite ligne AC: élevez au point C la perpendiculaire CD, & menez la droite AD, qui sera moyenne proportionnelle entre les deux AB, AC.

II.

Fig. 16.

En second lieu, pour trouver entre deux lignes données AB, AC, deux moyennes continuement proportionnelles, faites de ces deux lignes données

AB, AC, le parallelogramme rectangle ABCD; puis décrivez de son centre E, l'arc de cercle GHF de telle grandeur que la droite FG, qui sera tirée par les deux points F, G, où il coupe les deux lignes données AC, AB, prolongées, passe par le sommet D de l'angle droit du parallelogramme. Alors les deux lignes CF, BG, seront les deux moyennes proportionnelles, qu'on cherche. De sorte que les quatre lignes AB, CF, BG, AC, seront continuement proportionnelles.

Pl. 4, fig. 16.

III.

Enfin, pour trouver entre deux lignes données AB, AC, trois moyennes continuement proportionnelles, après avoir trouvé entre ces deux lignes données AB, AC, une moyenne proportionnelle AD, comme il a été enseigné, * cherchez de la même façon entre cette moyenne AD, & la premiere AC, une autre moyenne proportionnelle AF, & entre la même moyenne AD & la dernierere AB, une autre moyenne proportionnelle AG. Les trois lignes AF, AD, AG, seront les moyennes proportionnelles qu'on cherche: de sorte que les cinq lignes AC, AF, AD, AG, AB, seront dans une proportion continue.

Fig. 15.

*Art. I.

REMARQUES.

Si les deux lignes AB, AC, sont données en nombres, comme si AB étoit de 32 pieds, & AC, de 2, on pourra exprimer en nombres les trois moyennes AF, AD, AG, en multipliant ensemble les deux nombres 32, & 2, des deux lignes données AB, AC, & en prenant la racine quarrée du produit 64, qui donnera 8 pour la moyenne

AD, laquelle étant multipliée séparément par la premiere AC, & par la derniere AB, les racines quarrées des deux produits 16, 256, donneront 4 pour AF, & 16 pour AG.

Fig. 16. Mais pour trouver en nombres seulement deux moyennes proportionnelles entre les deux proposées AB, AC, telles que sont les deux CF, BG, en supposant que la plus petite AB soit de deux pieds, & la plus grande AC de 16; multipliez le quarré 4 de la premiere AB par la derniere AC, & prenez la racine cubique du produit 64, qui donnera 4 pour CF, premiere des deux moyennes proportionnelles cherchées. De même multipliez le quarré 256 de la derniere AC, par la premiere AB, & prenez la racine cubique du produit 512, qui donnera 8 pour l'autre moyenne proportionnelle BG.

PROBLEME XIV.

Décrire dans un cercle donné quatre cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent aussi la circonférence du cercle donné.

Pl. 4, fig. 17. AYant divisé le cercle donné ABCD, dont le centre est E, en quatre parties égales par les deux diametres perpendiculaires AC, BD, prenez sur le diametre BD, la ligne DF, égale à la ligne CD, qui est la soutendante ou la corde du quart de cercle. La ligne EF sera la longueur du rayon de chacun des quatre cercles égaux qu'on cherche. Si donc on porte la longueur de cette ligne EF sur les extrêmités des diametres perpendiculaires AC, BD, en AK, BG, CH, DI, & que des centres K, G, H, I, on décrive par les

points

points A, B, C, D, quatre circonférences de cercles, elles se toucheront mutuellement, & elles toucheront aussi celle du cercle donné ABCD.

REMARQUE.

Si l'on joint deux centres quelconques, comme I, K, par la ligne droite IK, cette ligne droite IK sera parallele à sa corde correspondante DA, & passera par le point d'attouchement O : elle fera aussi en I un angle demi-droit, ou de 45 degrés, avec le diametre BD ; d'où il suit que l'arc LO sera de 45 degrés, aussi-bien que l'arc MO, & que tout l'arc LM est un quart de cercle.

Si on joint la droite CF, l'angle ECF sera de 22 degrés 30 minutes ; d'où l'on peut tirer une autre construction pour la résolution du problême.

PROBLEME XV.

Décrire dans un demi-cercle donné trois cercles qui touchent la circonférence & le diametre de ce demi-cercle donné, & dont celui du milieu, qui est le plus grand, touche les deux autres, qui sont égaux.

Plan. 5. fig. 18.

ELevez du centre D du demi-cercle donné ABC, sur son diametre AC, la perpendiculaire DB, & divisez-la en deux également au point E. Ce point sera le centre du cercle BIDK, le plus grand des trois qu'on cherche.

Pour décrire les deux autres cercles, qui sont égaux entre eux, divisez le demi-diametre DE en deux également au point H ; puis de l'intervalle BH, & des deux points E, D, comme centres,

décrivez de part & d'autre deux arcs de cercle, qui se coupent ici en F & G. Ces deux points F, G, seront les centres des deux cercles égaux, qu'il ne sera pas difficile de décrire, parce que le rayon de chacun est égal à la ligne DH, ou à la quatrieme partie du diametre BD, ou bien, ce qui est la même chose, à la huitieme partie du grand diametre AC.

REMARQUE.

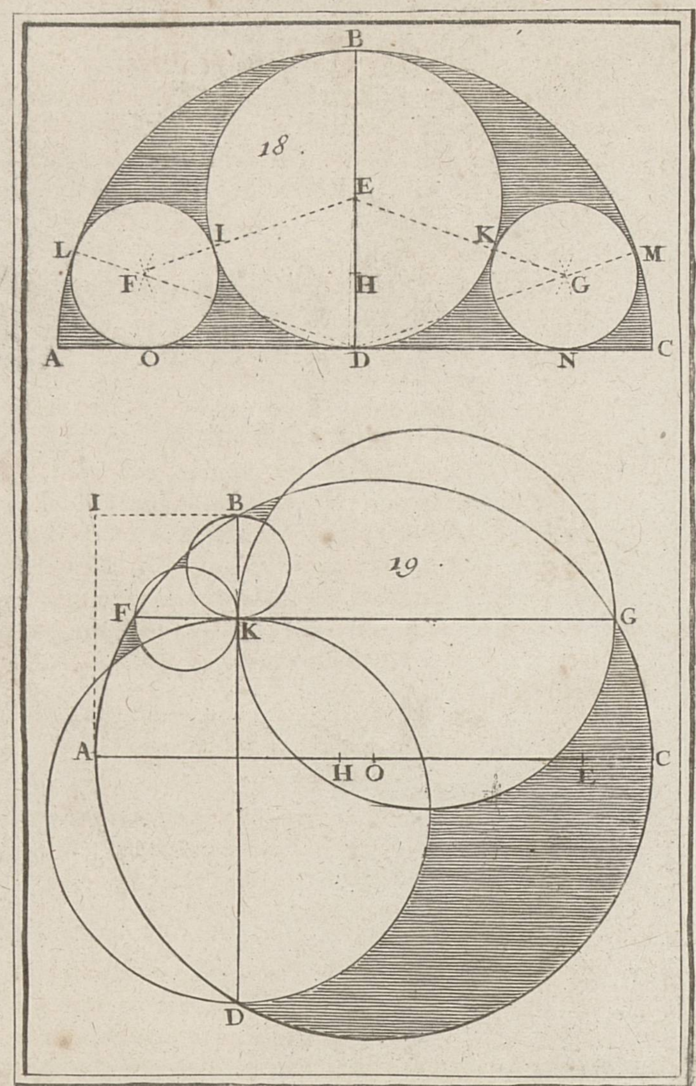
Il est évident que le demi-cercle ABC est double du cercle BIDK; le diametre AC étant double du diametre BD, & que le demi-cercle BID, est aussi double du cercle LOI, le rayon DE étant double du rayon FI, ou FL. D'où il est aisé de conclure que le triangle mixtiligne ABID est égal au demi-cercle BDI, & par conséquent que le demi-cercle ABC se trouve divisé en quatre parties égales par le diametre BD, & par la circonférence BIDK.

PROBLEME XVI.

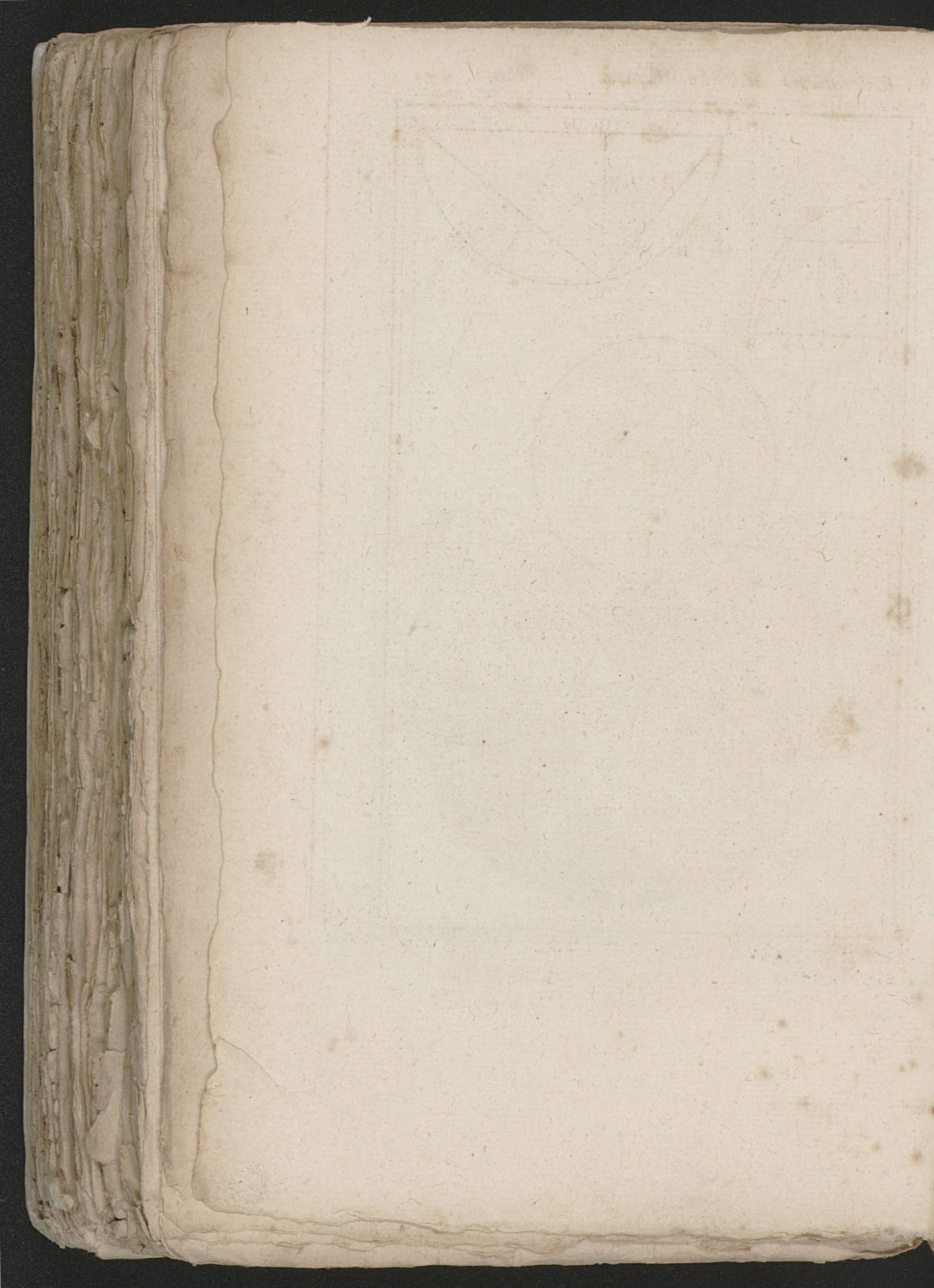
Décrire quatre cercles proportionnels, ensorte que leur somme soit égale à un ce cle donné, & que la somme de leurs rayons soit égale à une ligne donnée.

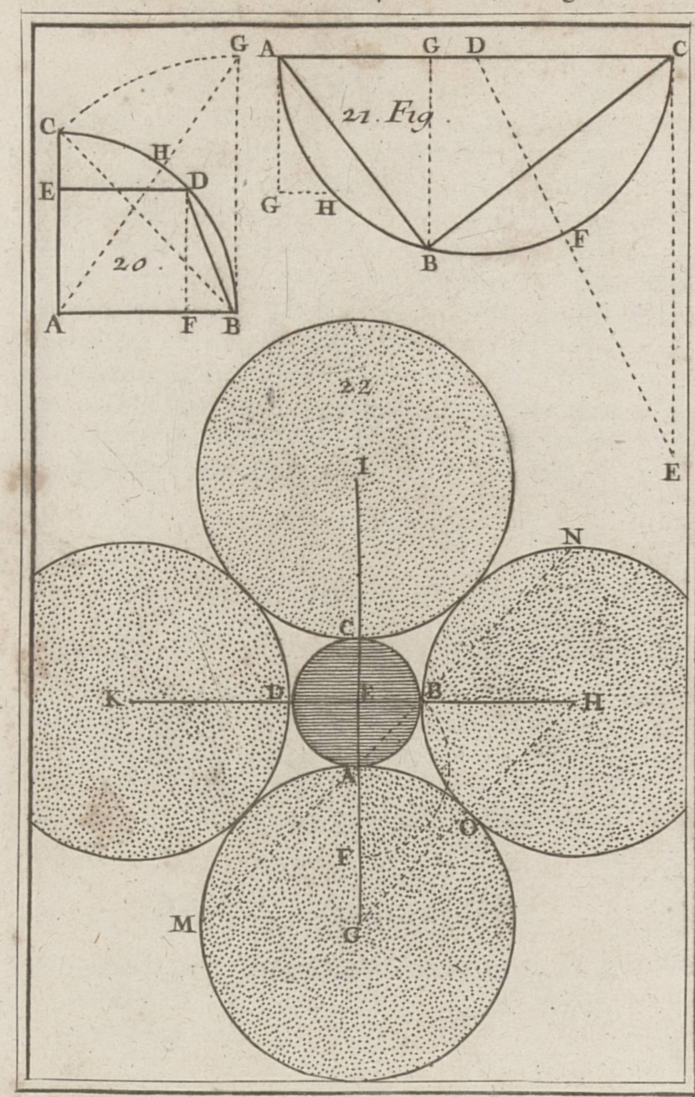
Plan. 5. fig. 19.

SOit ABCD le cercle donné, dont le point O est le centre, & AC un diametre. Soit AE la ligne donnée qui doit être plus grande que le rayon AO, & moindre que le diametre AC, si l'on veut que les quatre cercles qu'on cherche, soient inégaux. Les diametres de ces quatre cercles se détermineront en cette sorte.

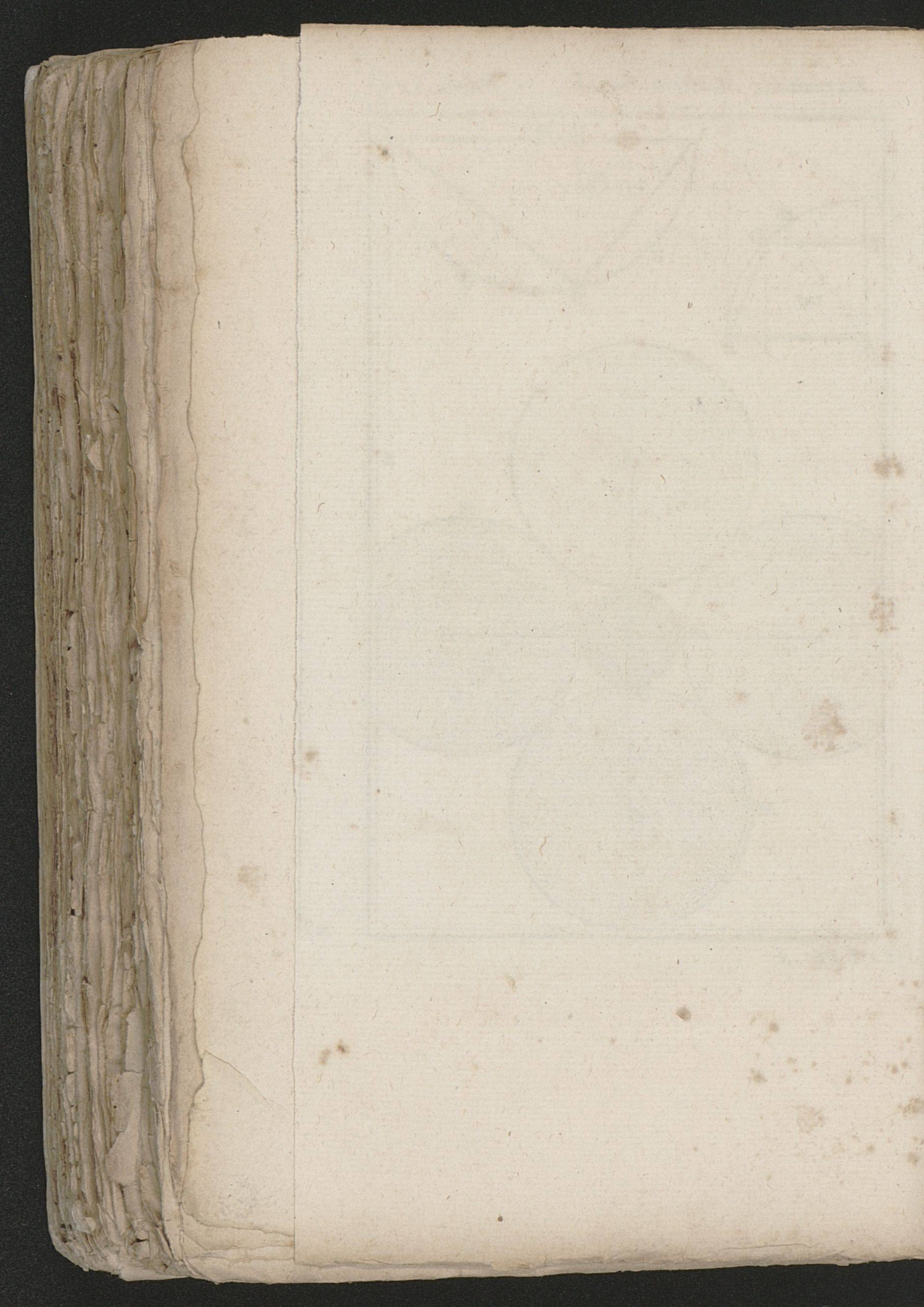


To. I. Pl. 5





N.°



Ayant tiré à volonté dans le cercle donné ABCD la ligne FG, parallele au diametre AC, & ayant retranché de la ligne donnée AE la partie EH, égale à la moitié de la ligne FG, élevez à l'extrêmité A du diametre AC, la ligne AI, faites-la égale à AH, & perpendiculaire * au diametre AC, & menez par le point I la ligne IB parallele au diametre AC : cette parallele IB rencontre ici la circonférence du cercle donné au point B. Par ce point B, tirez la ligne BD, perpendiculaire à * la ligne FG. Les quatre lignes KF, KB, KG, KD, seront les diametres des quatre cercles qu'on cherche.

*Pr I, p. 272.

REMARQUE.

Il arrivera que les deux plus petits cercles KF, KB, seront égaux entr'eux, aussi-bien que les deux plus grands KG, KD, lorsque la ligne FG sera égale à la ligne donnée AE. Ainsi quand on voudra que tous ces quatre cercles soient inégaux, on doit tirer la ligne FG plus grande ou plus petite que la ligne donnée AE : alors le cercle KF sera le plus petit de tous, & le cercle KD sera le plus grand.

PROBLEME XVII.

Déterminer sur la circonférence d'un cercle donné un arc dont le sinus soit égal à la corde du complément de cet arc.

POur déterminer sur la circonférence du quart de cercle ABC, dont le centre est A, l'arc CD, dont le sinus ED soit égal à la corde BD du complément de cet arc, élevez à l'extrêmité B

plan. 6. fig. 10.

du rayon AB, la perpendiculaire BG, égale à la corde BC du quart de cercle, & tirez du centre A par le point G, la droite AG : puis ayant pris sur le rayon AB, la partie AF égale à la partie GH, élevez au point F sur AB, la perpendiculaire FD, qui déterminera l'arc CD qu'on cherche.

REMARQUE.

La sécante AG de l'arc BH est égale à la tangente d'un arc de 60 degrés, c'est-à-dire que le rayon AH étant de 100000 parties, la ligne AG en comprend 173205, de laquelle ôtant AH, ou 100000, le reste 73205 est la partie GH, ou AF, c'est à dire, le sinus ED de l'arc CD, qui se trouvera de 47°, 3′, 31″, & par conséquent son complément BD de 42°, 56′, 29″. Ainsi nous sçavons que le sinus d'un arc de 47°, 3′, 31″, est égal à la corde d'un arc de 42°, 56′, 29″, qui est son complément.

PROBLEME XVIII.

Décrire un triangle rectangle, dont les trois côtés soient en progression géométrique.

Plan. 6. fig. 21.

AYant décrit à volonté le demi-cercle ABC, dont le centre est D, & dont le diametre AC sera pris pour l'hypotenuse du triangle rectangle qn'on cherche, tirez par l'extrêmité C de ce diametre AC, la ligne CE, égale & perpendiculaire au même diametre AC. Joignez la droite DE qui se trouve ici coupée par la circonférence du demi-cercle ABC au point F. Portez la longueur de la partie EF sur la circonférence ABC,

de A en B, & joignez les droites AB, BC, qui feront au point B un angle droit. Le triangle rectangle ABC sera celui qu'on cherche ; de sorte qu'il y aura même raison du côté AB, au côté BC, que du même côté BC, à l'hypotenuse AC.

Plan. 6. fig. 21.

REMARQUE.

Si de l'angle droit B, on mene la ligne BG perpendiculaire à l'hypotenuse AC, le plus grand segment CG sera égal au plus petit côté opposé AB, ou à la partie EF. De-là on peut tirer cette autre construction pour la résolution du problême. Prenez sur le diametre AC, la partie CG égale à la partie EF, & abaissant du point O la perpendiculaire GB, elle coupera la circonférence ABC au point B; d'où l'on menera les lignes AB, BC, qui formeront le triangle rectangle cherché.

On aura une troisieme construction, si l'on considere que l'hypotenuse AC se trouve coupée au point G par sa perpendiculaire BG, en moyenne & extrême raison, c'est-à-dire, que l'hypotenuse AC est à son plus grand segment CG, comme le même plus grand segment CG est au plus petit AG.

Si vous voulez une quatrieme construction, abaissez de l'extrêmité A, la ligne AG perpendiculaire au diametre AC, & égale à la troisieme partie du même diametre AC, & tirez par le point G au diametre AC, la parallele GH : cette ligne GH sera égale à la troisieme partie du petit segment AG.

❀

PROBLEME XIX.

Décrire quatre cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent par le dehors la circonférence d'un cercle donné.

Plan. 6, fig. 22.

Ayant divisé le cercle donné ABCD en quatre parties égales par les deux diametres AC, BD, qui se coupent à angle droit au centre E, prenez sur le diametre AC prolongé la ligne AF égale à la ligne AB, ou à la corde du quart de cercle. La ligne EF donnera la longueur du rayon de chacun des quatre cercles égaux qu'on cherche. Si donc on porte cette longueur EF sur chacun des deux diametres prolongés AC, BD, depuis la circonférence du cercle donné ABCD aux points G, H, I, K, & que de ces points, G, H, I, K, comme centres, on décrive, par les points A, B, C, D, autant de cercles égaux, ces quatre cercles se toucheront mutuellement, & toucheront aussi la circonférence du cercle donné ABCD.

REMARQUE.

Si l'on joint deux centres quelconques, comme GH, par la droite GH, cette ligne GH sera parallele à la corde correspondante AB, & elle passera par le point d'atouchement O. Elle fera par conséquent aux points G, H, des angles demi-droits, ou de 45 degrés; ce qui fait que chacun des arcs AG, BO, sera aussi de 45 degrés. D'où il est aisé de conclure, qu'en prolongeant de part & d'autre la corde AB en M & en N, chacun des arcs AM, BN, sera un quart de cercle.

PROBLEME XX.

Décrire un triangle rectangle, dont les trois côtés soient en progression arithmétique.

MArquez sur la ligne indéfinie AB, cinq parties égales de telle grandeur qu'il vous plaira, de A en B, & prenant la ligne determinée AB pour l'hypotenuse du triangle rectangle qu'on cherche, décrivez de son extrêmité A, à l'ouverture de trois parties, un arc de cercle, & de l'autre extrêmité B, à l'ouverture de quatre parties un autre arc de cercle qui coupera le premier en un point C, d'où vous tirerez aux deux extrêmités A, B, de l'hypotenuse AB, les droites AC, BC. Le triangle ABC, sera rectangle en C, & ses trois côtés AB, BC, AC, seront en proportion arithmétique, c'est-à-dire, qu'ils se surpasseront également, puisque le côté AB est de 5 parties, le côté BC de 4, & le côté AC de 3.

Plan. 7. fig. 23.

REMARQUE.

Ce triangle rectangle est seul de son espece, dont les trois côtés soient arithmétiquement proportionnels. Ils sont tels, que la somme de leurs cubes en nombres est un cube parfait; car AB étant 5, son cube est 125, BC étant 4, son cube est 64, & AC étant 3, son cube est 27, & la somme 216 de ces trois cubes 125, 64, 27, a pour racine cubique 6, qui dans ce triangle rectangle se rencontre égale à son aire.

Si on double tous les côtés du triangle ABC, en sorte que le côté AB soit de 10 parties, le côté

Fig. 24.

BC de 8, & le côté AC de 6, on aura un autre triangle rectangle semblable au précédent. Ses trois côtés seront encore en proportion arithmétique, & la somme de leurs cubes sera aussi un cube parfait; sçavoir, 1728, dont le côté, ou la racine cubique est 12. De plus, l'aire & le contour de ce second triangle rectangle ABC, seront égaux entre eux, chacun étant 24. Voyez le problême XXIII.

PROBLEME XXI.

Décrire autour d'un triangle équilatéral donné six cercles égaux, qui se touchent mutuellement, dont trois touchent les trois côtés du triangle, & les trois autres soient portés par ses sommets.

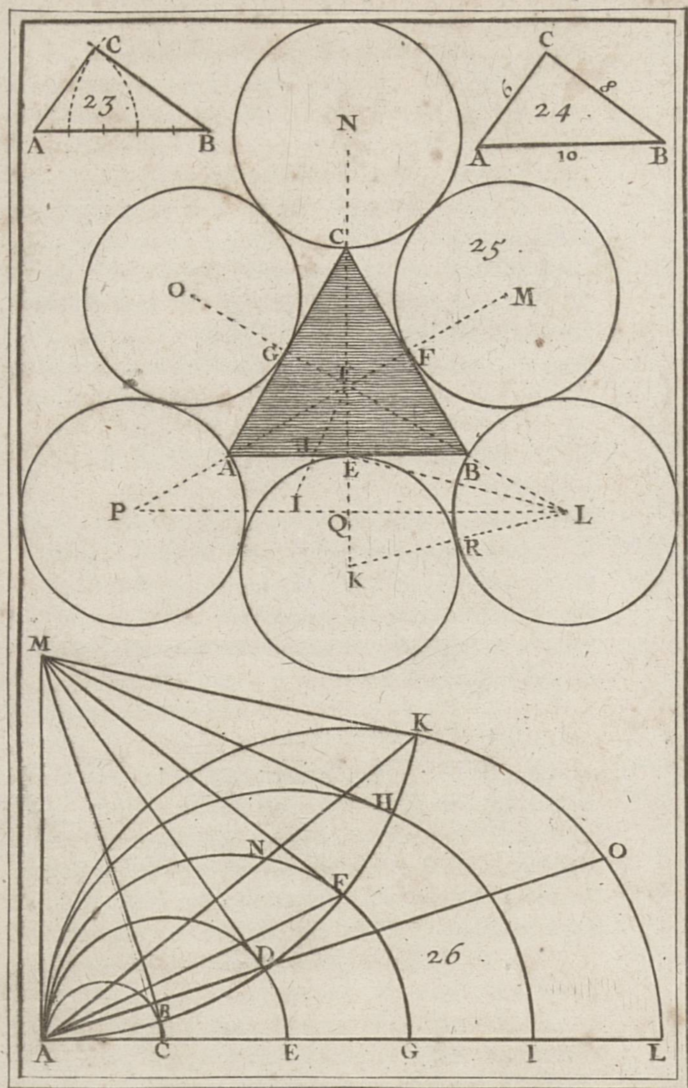
Plan.7, fig.25.

QUe le triangle équilatéral donné soit ABC, & que son centre soit D. Tirez de ce centre D, par les trois angles A, B, C, & par les milieux E, F, G, des trois côtés, autant de lignes droites, sur lesquelles on doit déterminer les centres K, L, M, N, O, P, des six cercles qu'on cherche, & qu'on trouvera en cette sorte.

Ayant pris sur le côté AB la partie EH, égale à la moitié de la perpendiculaire DE, & ayant tiré la droite DH, prolongez cette ligne DH en I, en sorte que la partie HI soit égale à la partie HE. Toute la ligne DI donnera la longueur du rayon de chacun des six cercles égaux qu'on veut décrire, dont les centres se trouveront en portant cette longueur DI de E en K, de B en L, &c.

REMARQUE.

Si l'on joint les deux centres P, L, par la droite



3.

To. I. Pl. 7.



PL, cette ligne PL sera parallele au côté AB, & divisera par conséquent à angles droits & en deux également au point Q, le rayon EK. D'où il suit que si l'on joint la droite EL, & la droite KL, qui passera par le point d'atouchement K, le triangle ELK sera isoscele, chacun des deux côtés égaux EL, KL, étant double de la base EK: l'arc ER sera de 75°, 31′, 20″, & l'arc BR de 44°, 28′ 40″; ce qui fait que ces deux arcs sont ensemble précisément 120 degrés, sçavoir, autant que l'angle PDL.

PROBLEME XXII.

Plusieurs demi-cercles qui se touchent au sommet de l'angle droit de deux lignes perpendiculaires, & qui ont leurs centres sur l'une de ces deux lignes étant donnés, déterminer les points où ces demi-cercles peuvent être touchés par des lignes droites tirées de ces points à un point donné sur l'autre ligne perpendiculaire.

Plan. 7, fig. 26.

QUe les demi-cercles ABC, ADE, AFG, AHI, AKL, qui ont leurs centres sur la ligne AL, perpendiculaire à la ligne AM, se touchent au sommet de l'angle droit MAL, & qu'il faille trouver les points où tous ces demi-cercles seront touchés chacun par une ligne droite tirée du point M donné sur la ligne AM.

Décrivez du point donné M, comme centre, par le point d'atouchement A, l'arc de cercle AK, qui coupera les circonférences des demi-cercles donnés en des points, comme B, D, F, H, K, qui seront les points d'atouchement qu'on cherche.

REMARQUE.

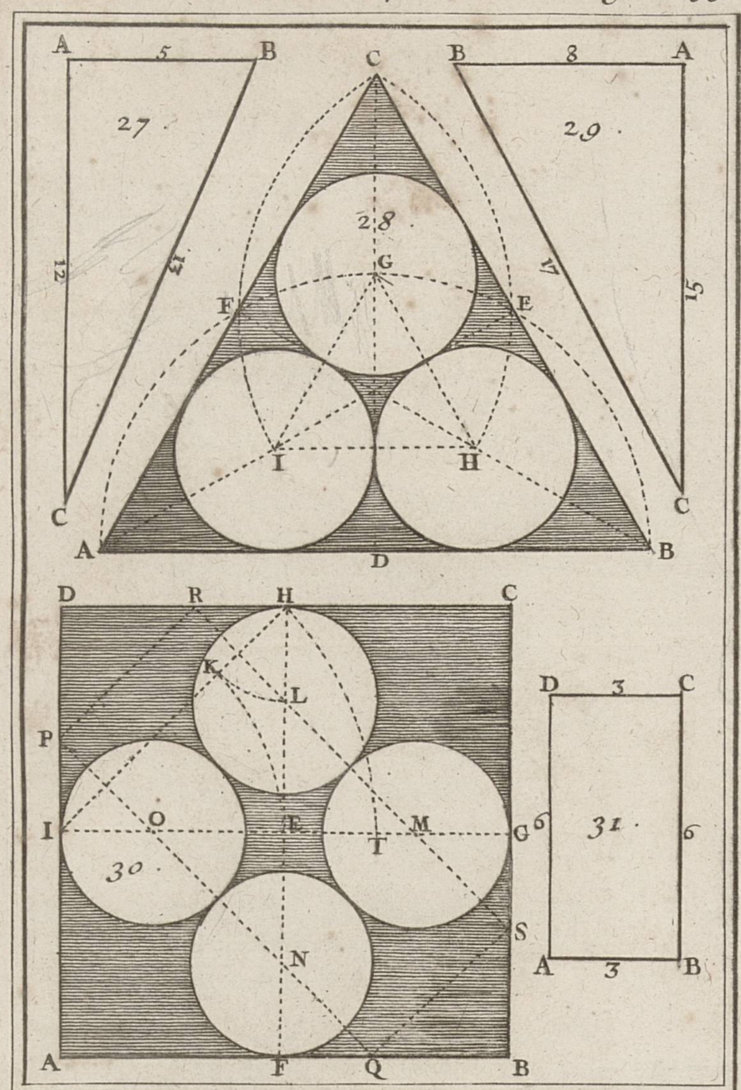
Lorsque les divisions de la ligne AL seront égales entre elles, on pourra se servir de ces demi-cercles pour diviser une ligne donnée en parties égales. On portera cette ligne, comme seroit AK, ou AO, du point A jusqu'à la circonférence du cinquieme demi-cercle, si on la veut diviser en cinq parties égales : elle se trouvera divisée en cinq parties égales, par la circonférence des autres demi-cercles. On divisera de la même maniere en trois parties égales la ligne proposée, ou telle autre qu'on voudra comme AN, &c.

PROBLEME XXIII.

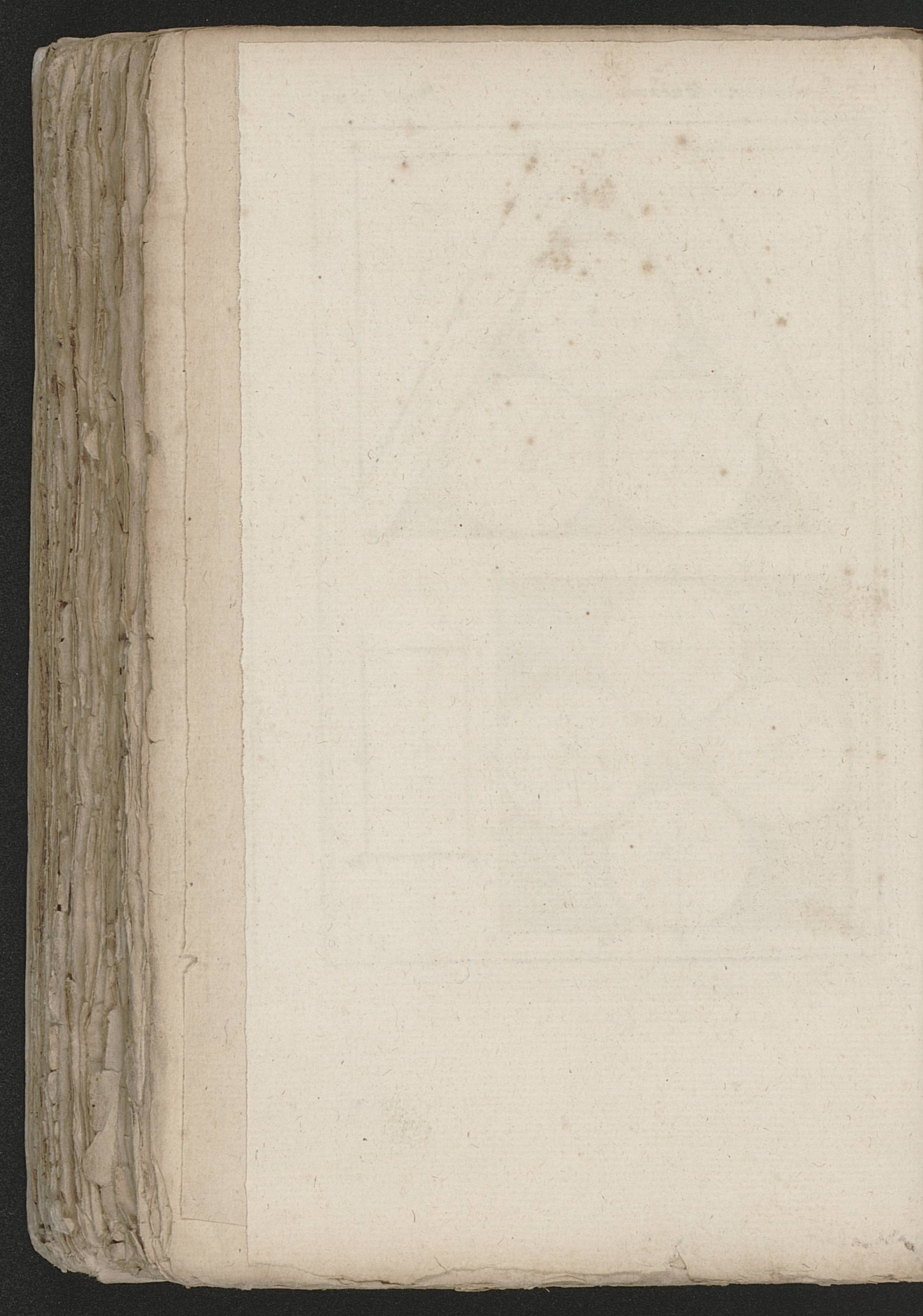
Décrire un triangle rectangle, dont l'aire exprimée en nombres, soit égale au contour.

Plan. 8, fig. 27.

TIrez les deux lignes perpendiculaires AB, AC, de telle longueur que l'une AB soit de 5 parties prises sur une échelle divisée en parties égales, & que l'autre AC soit de 12 parties de la même échelle. Joignez l'hypotenuse BC, qui se trouvera précisément de 13 parties égales, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble les quarrés 25, 144, des deux côtés AB, AC, & en prenant la racine quarrée de la somme 169. L'aire du triangle rectangle ABC sera égale à son contour, ou à la somme des trois côtés, chacun étant 30. Il arrive la même chose à cet autre triangle rectangle exprimé en nombres entiers, 6, 8, 10, dont l'aire & le contour sont chacun 24.


A
5
B
C
B
8
A
27 .
29 .
28 .
12
13
G
17
15
F
E
I
H
C
C
A
D
B
D
R
H
C
K
L
D
3
C
P
I
O
E
M
G
6
31 .
6
T
30 .
S
N
A
3
B
A
F
Q
B

To. I. Pl. 8 .



REMARQUE.

Il n'y a en nombres entiers que ces deux triangles rectangles, 6, 8, 10 & 5, 12, 13, de chacun desquels l'aire soit égale à son contour : mais en nombres rompus il y en a une infinité, que l'on peut trouver par ce canon général qui a sa démonstration. *Formez d'un nombre quarré quelconque, & du même nombre quarré augmenté de 2, un triangle rectangle; divisez-le par ce nombre quarré, & vous aurez un second triangle rectangle, dont l'aire sera égale à son contour.*

Plan. 8, fig. 27.

Comme si de 9 & de 11, on forme ce triangle rectangle, 40, 198, 202, & qu'on le divise par 9, on aura cet autre triangle rectangle $\frac{40\ \ 198\ \ 202}{9}$ dont l'aire & le contour sont égaux, chacun étant $\frac{440}{9}$. Pareillement, si de 16 & de 18, on forme ce triangle rectangle 68, 576, 580, & qu'on le divise par 16, on aura cet autre triangle $\frac{68\ \ 576\ \ 580}{16}$, ou bien celui-ci étant réduit à ses moindres termes, $\frac{17\ \ 144\ \ 145}{4}$, dont le contour & l'aire sont chacun $\frac{153}{2}$. Ainsi des autres.

Probl. IX. d'arith. p. 50.

PROBLEME XXIV.

Décrire au dedans d'un triangle équilatéral, trois cercles égaux qui se touchent mutuellement, & qui touchent aussi les trois côtés de ce triangle.

Pour inscrire dans le triangle équilatéral ABC, trois cercles égaux, qui se touchant mutuellement, touchent aussi les côtés de ce triangle, divisez chacun de ces côtés en deux également aux points D, E, F. Par ces points D, E, F, tirez

Fig. 28.

Plan. 8, fig. 28.

aux angles opposés autant de lignes droites, sur lesquelles vous marquerez les centres G, H, I, des trois cercles qu'on cherche, en transportant sur chaque ligne perpendiculaire la moitié du côté du triangle équilatéral de son point de milieu, vers le sommet de l'angle, c'est-à-dire, la moitié AD, ou BD, de D en G, de E en I, & de F en H.

Pour avoir le rayon des cercles cherchés, joignez deux centres G, H, par la ligne GH, qui se trouvera divisée en deux parties égales par la ligne tirée du milieu du côté CB au sommet de l'angle A. Cette moitié sera le rayon de chacun des cercles qu'on cherche : ou bien divisez GC en deux parties égales, la moitié sera aussi le rayon des cercles cherchés.

REMARQUE.

Les droites qui joignent les centres G, H, I, passent par les points d'atouchement, & forment le triangle équilatéral GHI, dont les côtés sont paralleles à ceux du triangle donné ABC. Il se forme aussi trois trapézoïdes égaux AIHB, BHGC, CGIA, dont chacun a trois côtés égaux à ceux du triangle équilatéral GHI, & dont les aires sont égales chacune à la huitieme partie du quarré du côté AB du triangle donné ABC.



PROBLEME XXV.

Décrire un triangle rectangle dont l'aire exprimée en nombres soit sesquialtere du contour aussi exprimé en nombres.

Tirez les deux lignes perpendiculaires AB, AC, de telle grandeur que l'une AB soit de 8 parties prises sur une échelle divisée en parties égales, & que l'autre AC soit de 15 parties de la même échelle. Joignez l'hypotenuse BC, qui se trouvera précisément de 17 parties égales, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble les quarrés 64, 225, des deux côtés AB, AC, & en prenant la racine quarrée de la somme 289. L'aire 60 du triangle rectangle ABC sera au contour 40, comme 3 est à 2. Il arrive la même chose à cet autre triangle rectangle en nombres entiers 7, 24, 25, dont l'aire 84 est aussi sesquialtere du contour 56, de sorte que ce contour 56 est égal aux deux tiers de l'aire 84.

Plan. 8, fig. 29.

REMARQUE.

Il n'y a en nombres entiers que ces deux triangles rectangles, 8, 15, 17, & 7, 24, 25, de chacun desquels l'aire soit sesquialtere de son contour : mais en nombres rompus il y en a une infinité d'autres qui ont la même propriété. On peut les trouver par ce canon général, que nous avons tiré de l'algebre. *Formez d'un nombre quarré quelconque, & du même nombre quarré augmenté de 3, un triangle rectangle ; divisez-le par ce nombre quarré, & vous aurez un second triangle rectangle, dont l'aire sera sesquialtere du contour.*

Probl. IX. d'arith. p. 50.

Comme si de 4 & de 7, on forme ce triangle 33, 56, 65, & qu'on le divise par 4, on aura cet autre triangle rectangle $\frac{33\ 56\ 65}{4}$, dont l'aire $\frac{231}{4}$ est à son contour $\frac{77}{2}$ comme 3 est à 2. Pareillement si de 16 & de 19, on forme ce triangle rectangle 105, 608, 617, & qu'on le divise par 16, on aura cet autre triangle $\frac{105\ 608\ 617}{16}$, dont l'aire $\frac{1995}{16}$ est à son contour $\frac{665}{8}$, comme 3 est à 2. Ainsi des autres.

PROBLEME XXVI.

Décrire au dedans d'un quarré donné, quatre cercles égaux, qui se touchent mutuellement & qui touchent aussi les côtés de ce quarré.

Plan. 8, fig. 30.

SI le quarré donné est ABCD, divisez chacun de ses côtés en deux également aux points F, G, H, I, & menez les droites FH, GI, qui se couperont à angles droits & en deux également au centre E du quarré. On marquera sur ces deux lignes FH, GI, les centres L, M, N, O, des quatre cercles qu'on cherche en cette sorte.

Joignez la droite HI, & retranchez-en la partie IK égale à la moitié IE de la ligne IG, ou du côté du quarré donné. Le reste HK sera le rayon de chacun des quatre cercles qu'on veut décrire. C'est pourquoi si l'on porte la longueur HK, sur les lignes FH, GI, depuis leurs extrêmités F, G, H, I, aux points N, M, L, O, le problême sera résolu.

On peut encore le résoudre de cette maniere: retranchez de la ligne IG, la partie IT, égale à a ligne IH; faites les lignes EL, EM, EN, EO, égales chacune au reste TG, & vous aurez, com-

me auparavant, les centres L, M, N, O, des quatre cercles qu'on cherche, & que l'on trouvera aussi en faisant les lignes FN, GM, HL, IO, égales chacune à la partie ET.

Voici encore une autre maniere. Faites les quatre lignes AP, AQ, CR, CS, égales chacune à la ligne IH, & joignez les droites PQ, RS, qui donneront sur les deux lignes FH, GI, les centres L, M, N, O, des quatre cercles qu'on cherche.

REMARQUE.

Il est aisé à démontrer que chacune des deux lignes PQ, RS, est égale au côté AB du quarré donné ABCD, & que chacune des deux lignes PR, QS, est égale au diametre de chacun des cercles égaux, qui se touchent. On peut encore démontrer aisément que chacun des deux triangles isosceles rectangles APQ, CRS, est égal au quarré DIEH, ou à la quatrieme partie du quarré proposé ABCD : & que le triangle isoscele rectangle OEN est égal au quarré du rayon OI.

PROBLEME XXVII.

Décrire un parallelogramme rectangle, dont l'aire exprimée en nombres soit égale au contour.

Tirez les deux lignes perpendiculaires AB, AD, de telle grandeur, que l'une AB, soit de trois parties prises sur une échelle divisée en parties égales, & que l'autre AD soit de 6 parties de la même échelle. Décrivez du point D, comme centre, & de l'intervalle AB, un arc de cercle vers C, & du point B, comme centre, & de l'in-

Plan. 8, fig. 31.

tervalle AD, un autre arc de cercle, qui coupera le premier au point C. De ce point C, vous tirerez les deux lignes CB, CD, qui acheveront le rectangle ABCD, dont l'aire est égale au contour, chacun étant 18.

REMARQUE.

Il n'y a que trois parallelogrammes rectangles dont l'aire égale au contour soit exprimée en nombres entiers : ce sont, le rectangle qu'on vient de décrire : celui qui a pour côtés des nombres doubles des côtés de celui-ci (12, 6,), & le quarré dont le côté est 4 Mais il y a une infinité de parallelogrammes rectangles exprimés en nombres rompus, dont on peut déterminer les côtés de cette sorte.

Ayant donné au côté AD tel nombre qu'on voudra, plus grand que 2, comme 8, divisez son double 16 par le même côté diminué de 2, c'est-à-dire, par 6 : le quotient $\frac{8}{3}$ sera l'autre côté AB. Ainsi on aura en nombres un parallelogramme rectangle, ayant 8 pour longueur, & $\frac{8}{3}$ pour largeur, dont le contour & l'aire seront chacun $\frac{64}{3}$, ou 21 $\frac{1}{3}$.



PROBL

PROBLEME XXVIII.

Mesurer avec le chapeau une distance qui n'est accessible qu'en une de ses deux extrémités.

LA distance à mesurer doit être d'une grandeur médiocre, autrement il seroit difficile de la mesurer exactement avec le chapeau, parce que pour peu que l'on manquât à viser juste, ou à se tenir bien droit, on se tromperoit sensiblement dans sa mesure, sur-tout si le terrein étoit un peu inégal.

Pl. 9, fig. 32.

Pour mesurer donc avec le chapeau la distance AB, qui n'est accessible qu'en son extrêmimité A, comme seroit la largeur d'une petite riviere, il faut que celui qui la veut mesurer se tienne bien droit à cette extrêmité A, & qu'appuyant son menton sur un petit bâton, qui doit être aussi appuyé sur quelque bouton de son habit, afin que sa tête puisse demeurer en même état, il abbaisse son chapeau sur le front, jusqu'à ce que le bord cache à sa vue l'extrêmité inaccessible B de la distance à mesurer AB. Après quoi il doit se tourner vers un terrein égal & uniforme, & remarquer en regardant, par le même endroit du bord de son chapeau, le point de ce terrein où sa vue se terminera comme en G. Alors en mesurant avec un cordeau, ou avec une chaîne, la distance AC, il aura la longueur de la distance proposée AB.

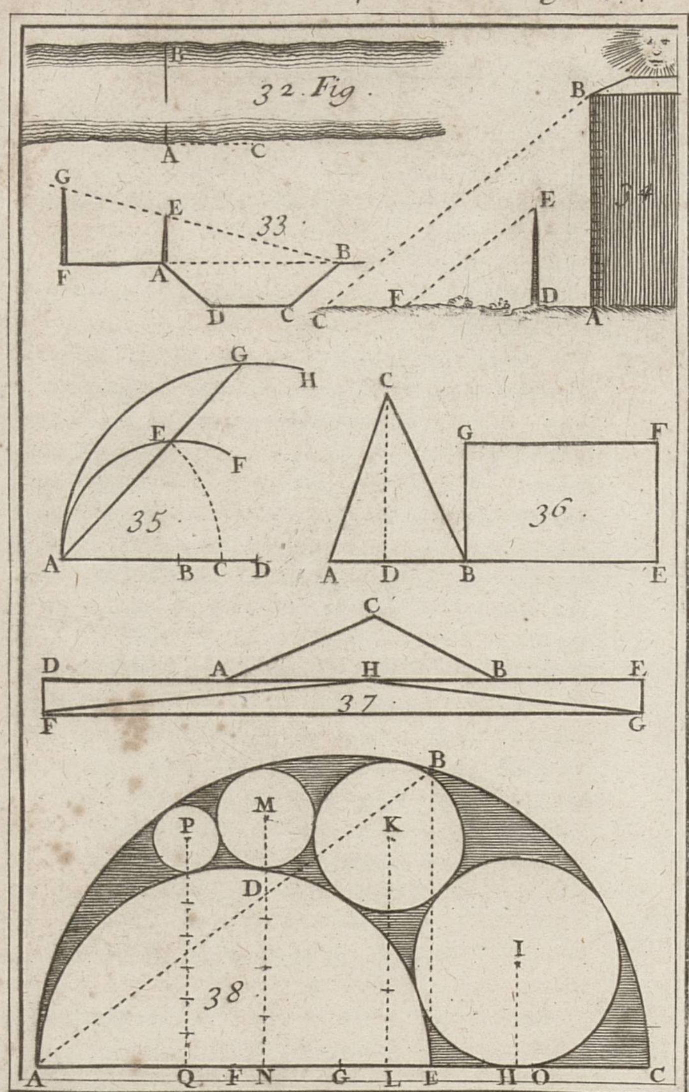


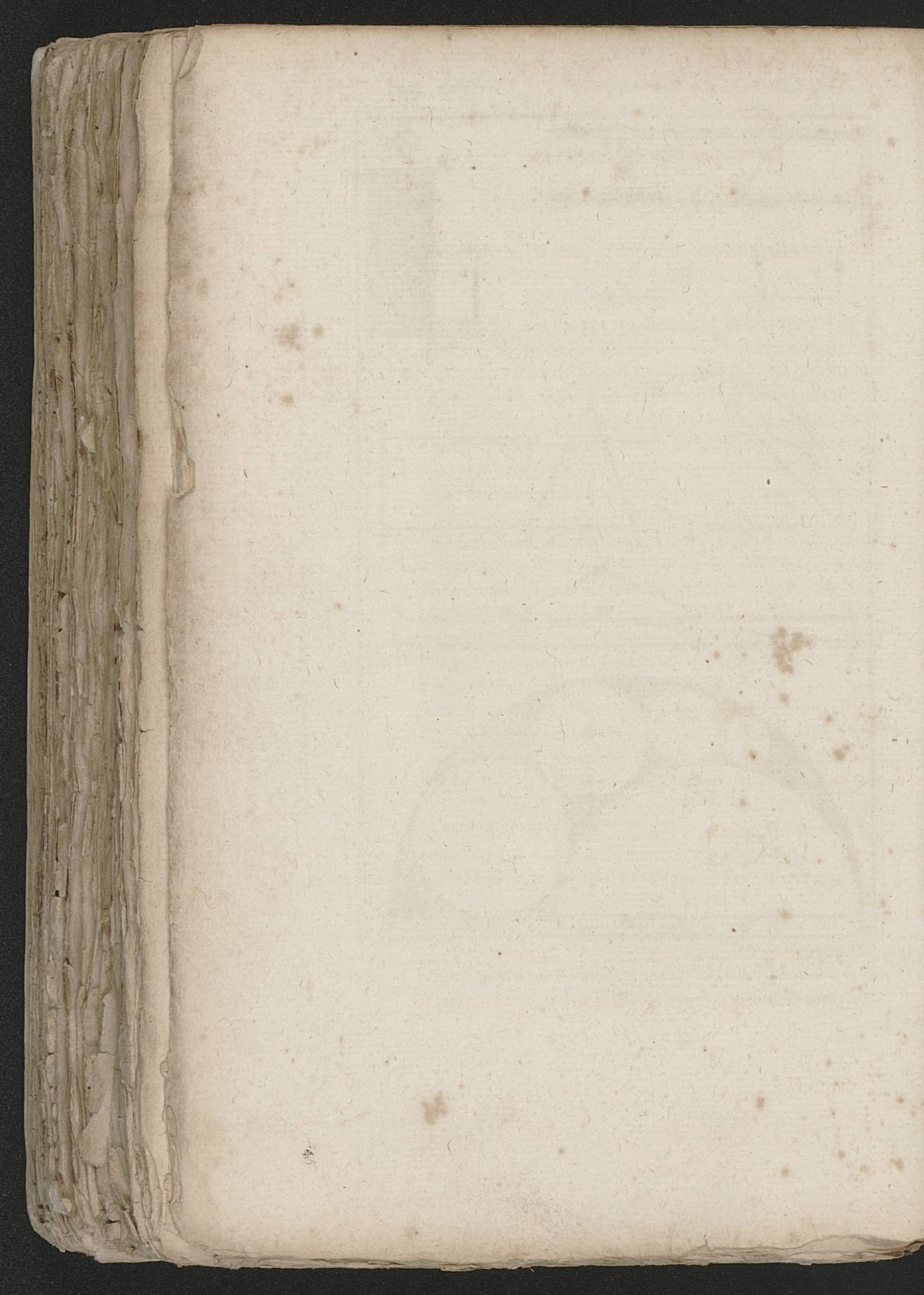
PROBLEME XXIX.

Mesurer une ligne horisontale, qui n'est accessible qu'en l'une de ses deux extrêmités, par le moyen de deux bâtons inégaux.

Pl. 9. fig. 33.

POur connoître la longueur de la ligne horisontale AB, qui représente la largeur du fossé ABCD, & qui n'est accessible qu'en son extrêmité A, élevez à-plomb en cette extrêmité A, le plus petit bâton AE des deux dont vous voulez vous servir pour mesurer cette ligne AB. Plantez aussi à-plomb l'autre bâton plus grand FG, en ligne droite avec la ligne à mesurer AB, & à telle distance du premier AE, que par les deux bouts E, G, de ces deux bâtons ainsi élevés, vous apperceviez l'autre extrêmité B inaccessible. Après cela mesurez exactement la distance AF, que nous supposerons de 12 pieds, & la longueur des deux bâtons AE, FG, dont le plus petit AE sera supposé de 3 pieds, & le plus grand FG, de 5. De sorte que dans cette supposition l'excès du grand bâton FG, sur le plus petit AE, sera de 2 pieds, comme on le connoît en ôtant 3 de 5. Cet excès 2 sera le premier terme d'une regle de trois directe; 12, ou la distance AF, sera le second; 3, ou le plus petit bâton AF, sera le troisieme; & la ligne AB, qu'on cherche, sera le quatrieme: elle se trouvera de 18 pieds. Car si on multiplie le second terme 12, qui est la distance AF, par le troisieme 3, qui est le plus petit bâton AE, & qu'on divise le produit 36 par 2, qui est l'excès du grand bâton FG sur le plus petit AE, on a 18 pieds pour la longueur de la ligne proposée AB.


32 . Fig .
33 .
34
35 .
36 .
37 .
38 .



PROBLEME XXX.

Mesurer une hauteur accessible par le moyen de son ombre.

POur connoître la hauteur accessible AB, par le moyen de son ombre AC, terminée par le rayon BC du soleil, élevez à-plomb le bâton DE d'une longueur prise à volonté, comme de 8 pieds, & mesurez la grandeur de son ombre DF, que nous supposerons de 12 pieds. Mesurez en même tems l'ombre AC, qui soit, par exemple, de 36 pieds. J'ai dit en même tems, parce qu'autrement le soleil changeant de place à chaque instant, les rayons BC, EF, ne seront plus paralleles ; ce qui empêcheroit de pouvoir trouver la hauteur AB par cette regle de trois directe : si 12 pieds de l'ombre DF proviennent d'une hauteur DE de 8 pieds, de quelle hauteur proviendra l'ombre AC de 36 pieds ? On trouvera 24 pieds pour la hauteur AB, qu'on cherche : car en multipliant le troisieme terme 36 par le second 8, & en divisant le produit 288 par le premier 12, on a pour quotient 24, qui est le quatrieme terme proportionnel, ou la hauteur proposée AB.

Pl. 9. fig. 34.

PROBLEME XXXI.

Trouver à trois lignes données une quatrieme proportionnelle.

POur trouver aux trois lignes données AB, AC, AD, une quatrieme proportionnelle, décrivez des deux extrêmités B, D, de la pre-

Fig. 35.

miere & de la troisieme ligne donnée, par l'extrêmité commune A, les deux arcs de cercle AEF, AGH ; & ayant appliqué sur le premier AEF la ligne AE, égale à la seconde ligne donnée AC, prolongez cette ligne AE jusqu'à ce qu'elle rencontre le second arc AGH, en quelque point, comme en G. Toute la ligne AG sera la quatrieme proportionnelle qu'on cherche.

PROBLEME XXXII.

Décrire sur une ligne donnée un parallelogramme rectangle, dont l'aire soit double de celle d'un triangle donné.

Pl. 9, fig. 36.

SI le triangle donné est ABC, & que la ligne donnée soit BE, élevez à l'extrêmité E la perpendiculaire EF, qui soit la quatrieme proportionnelle à la base donnée BE, à la base AB du triangle donné ABC, & à sa hauteur CD. Achevez le rectangle BEFG, qui sera celui qu'on cherche. Ce problême n'a été mis que pour résoudre le suivant.

PROBLEME XXXIII.

Changer un triangle donné en un autre triangle dont chaque côté soit plus grand que chaque côté du triangle donné.

Fig. 37.

SI le triangle donné est ABC, prolongez sa base AB de part & d'autre en D & en E, en sorte que la ligne AD soit égale au côté AC, & la ligne BE au côté BC : & par le moyen du problême précédent, décrivez sur la ligne DE le parallelogramme rectangle DEGF, qui soit double

du triangle donné ABC. Cela étant fait, si l'on prend sur la ligne DE, entre les points A, B, un point à discrétion, comme H, d'où l'on tire aux deux extremités F, G, les droites FH, GH, le triangle FGH sera celui qu'on cherche, c'est-à-dire, qu'il sera égal au proposé ABC, l'un & l'autre étant chacun la moitié du rectangle FGED, & chacun de ses côtés sera plus grand que chacun des côtés du triangle donné ABC.

REMARQUE.

On peut même avoir un triangle moindre que le proposé ABC, quoique tous ses côtés soient plus grands que tous les côtés du triangle ABC, en prenant le sommet H du triangle FGH au dessous de la base AB.

PROBLEME XXXIV.

Deux demi-cercle qui se touchent en dedans, étant donnés sur une même ligne droite, décrire un cercle qui touche la ligne droite & les circonférences des deux demi-cercles donnés.

Pl. 9. fig. 38.

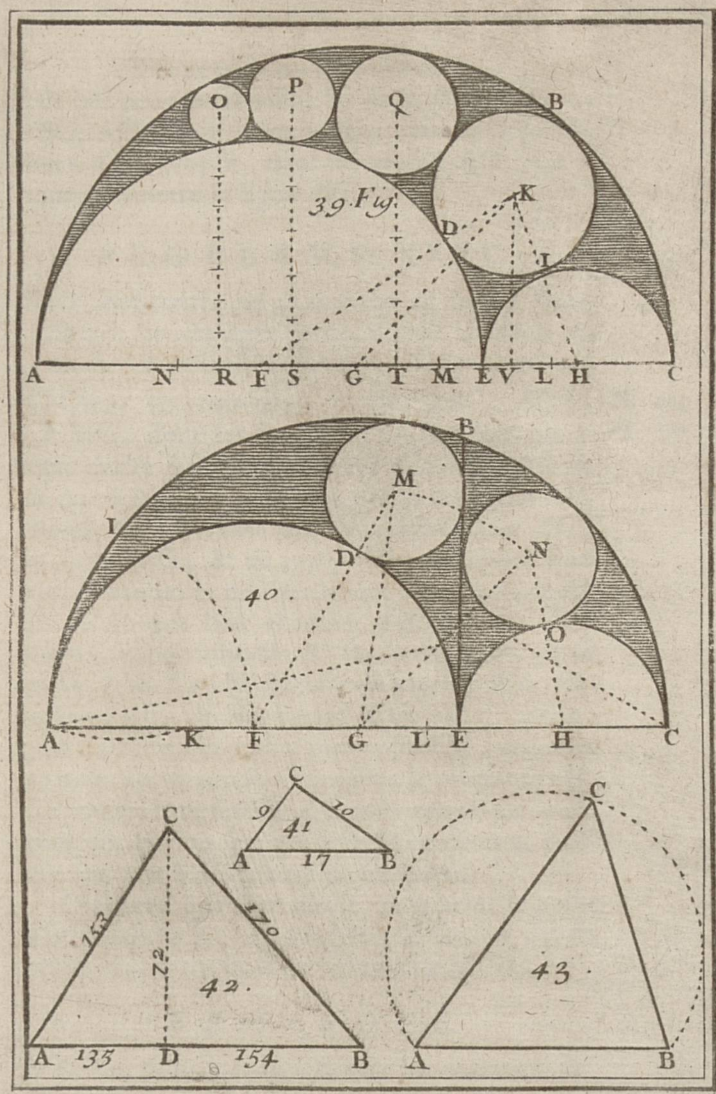
Je suppose que les deux demi-cercles ABC, ADE, sont posés sur la ligne droite AC, & qu'ils se touchent au point A. Pour décrire un cercle qui touche les deux circonférences ABC, ADE, & la partie EC de la ligne droite AC, portez la longueur du demi-diametre AG du grand demi-cercle ABC, de F, centre du petit demi-cercle ADE, en O, pour avoir la ligne AO, égale à la somme des demi-diamêtres AF, AG des deux demi-cercles donnés ABC, ADE. Elevez

Pl. 9. fig. 38. au point E, sur AC, la perpendiculaire EB, & joignez la droite AB. Cherchez aux deux lignes AO, AB, une troisieme proportionnelle AH, pour avoir en H le point d'attouchement du cercle qu'on veut décrire, & de la ligne droite EC. Elevez de ce point H sur EC la perpendiculaire HI, quatrieme proportionnelle aux trois lignes AO, AH, FG, pour avoir en I le centre du cercle qu'on cherche, dont la circonférence touchera EC en H, & les circonférences des deux cercles donnés, le plus grand au dedans, & le plus petit au dehors.

REMARQUE.

Si au dedans de l'espace terminé par les deux circonférences ABC, ADE, on décrit un second cercle qui touche le premier décrit du centre I, & les deux circonférences ABC, ADE, & que du centre K de ce second cercle on abaisse la droite KL perpendiculaire au diametre AC, cette perpendiculaire KL sera triple du rayon du cercle décrit du centre K. Si au dedans du même espace on décrit un troisieme cercle, qui touche le second décrit du centre K, & les circonférences ABC, ADE, la perpendiculaire abaissée du centre M de ce troisieme cercle sur le diametre AC, sera quintuple du rayon du même cercle. De même, si au dedans du même espace on décrit un quatrieme cercle, qui touche le troisieme décrit du centre M, & les circonférences des deux demi-cercles, la perpendiculaire abaissée du centre P de ce quatrieme cercle sur le diametre AC, sera septuple du rayon du même cercle, & ainsi des autres, selon la progression des nombres impairs, 3, 5, 7, 9, &c.

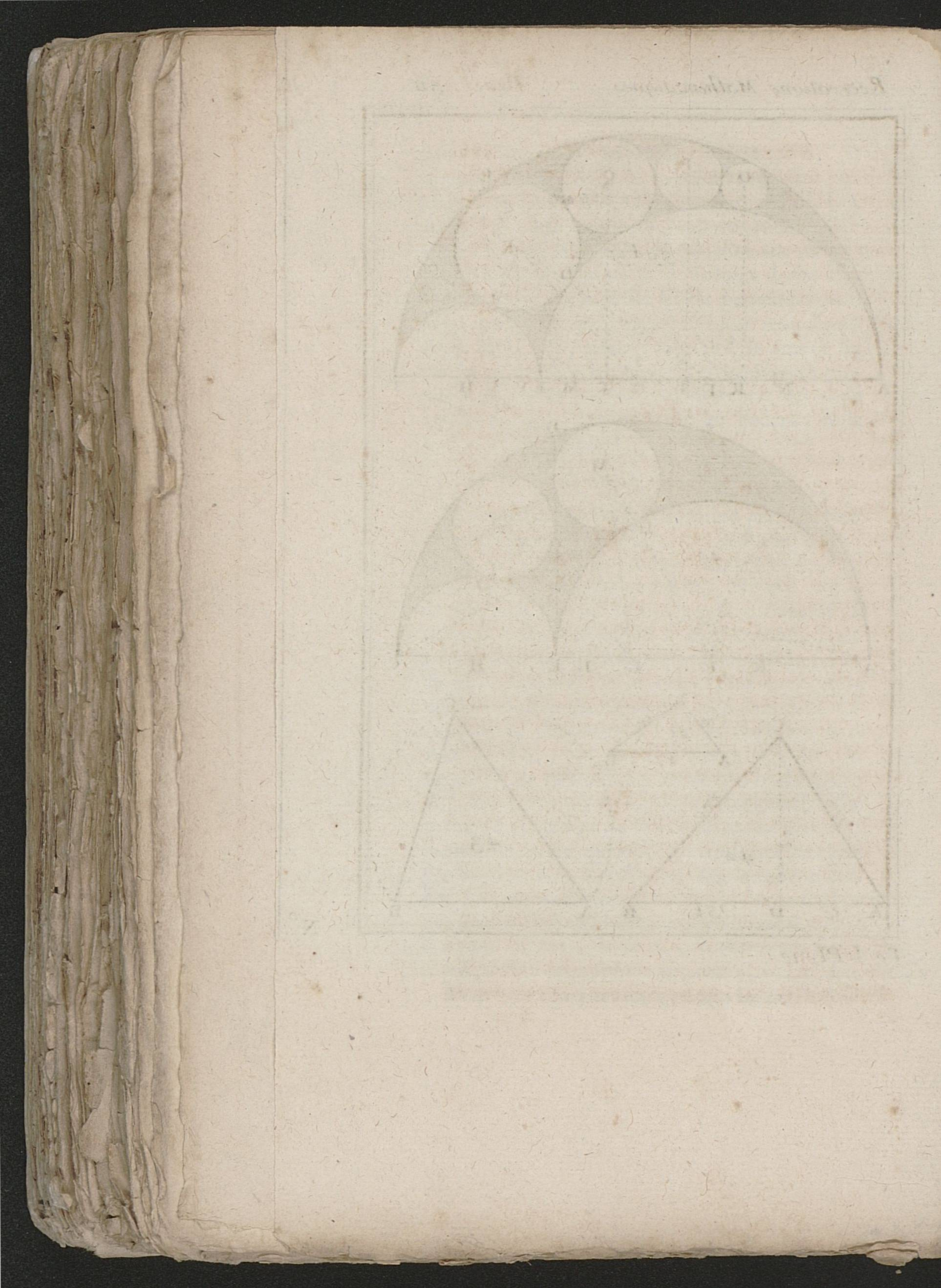
Nous remarquerons ici, que tous les cercles in-



O P Q B
K
39 Fig.
D
I
A N R F S G T M E V L H C
B
M
I
N
D
40.
O
A K F G L E H C
C
9 10
41
A 17 B
C
153
170
72
42.
A 135 D 154 B
C
43.
A B

To. I. Pl. 10.

N°.



finis qui peuvent toucher les deux circonférences ABC, ADE, ont leurs centres dans la circonférence d'une ellipse, dont un axe est AO, qui a pour parametre la ligne AH.

PROBLEME XXXV.

Trois demi-cercles qui se touchent en dedans étant donnés sur une ligne droite, décrire un cercle qui touche les circonférences des trois demi-cercles.

Soient les trois demi-cercles ABC, ADE, EIC, dont les centres F, G, H, sont sur la ligne droite AC. Ayant trouvé à la ligne FG & au rayon AF, une troisieme proportionnelle AL, cherchez à la somme des deux lignes AL, AG, au rayon AG, & au rayon AF, une quatrieme proportionnelle, qui sera la longueur du rayon KI du cercle que l'on cherche. Portez cette quatrieme proportionnelle KI sur la ligne AC de G en M, & de F en N. Ensuite du centre F & de l'intervalle NE, décrivez vers K un arc de cercle: puis du centre H & de l'intervalle FM, décrivez un autre arc de cercle qui coupera le premier en K. Ce point d'intersection K sera le centre du cercle cherché, qu'il ne sera pas difficile de décrire, puisque son rayon GM, ou FN, est connu.

Pl. 10. fig. 39.

Observez que l'on auroit pu trouver le point d'intersection K, en décrivant le second arc de cercle du centre G & de l'intervalle MC.

REMARQUE.

Si l'on joint le centre K avec les centres F, G, H, des trois demi-cercles donnés, par les lignes droites FK, GK, HK, on aura les deux triangles FKG, GKH, de même contour, le contour de

chacun étant égal au diametre AC du grand demi-cercle donné ABC, à cause des deux lignes égales AF, GH.

Si entre les deux circonférences ABC, ADE, on décrit, comme dans le problême précédent, autant de cercles qu'on voudra, qui se touchant mutuellement, touchent aussi les deux circonférences ABC, ADE, & que de leurs centres O, P, Q, K, on tire sur le diametre AC, autant de perpendiculaires, la perpendiculaire KV sera égale au diametre de son cercle ; la perpendiculaire QT sera double du diametre de son cercle ; la perpendiculaire PS sera triple du diametre de son cercle ; la perpendiculaire OR sera quadruple du diametre de son cercle, & ainsi des autres, selon la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.

PROBLEME XXXVI.

Trois demi-cercles qui se touchent en dedans étant donnés sur une ligne droite, avec une autre ligne droite tirée par le point d'attouchement des deux demi-cercles intérieurs, & perpendiculaire à la premiere ligne droite, décrire deux cercles égaux qui touchent cette perpendiculaire & les circonférences des deux demi-cercles.

Pl. 10, fig. 40.

SOient les trois demi-cercles donnés ABC, ADE, EOC, dont les centres F, G, H, sont placés sur la ligne droite AC, qui est coupée à angles droits au point E, par la ligne droite BE. On trouvera le rayon commun aux deux cercles égaux qui doivent toucher la perpendiculaire BE & les circonférences des deux demi-cercles, en décrivant du point A par le centre F, l'arc de cercle

FI, puis du point I par le point A, l'arc de cercle AK ; la ligne KF donnera la longueur du rayon des deux cercles égaux que l'on cherche, dont les centres M, N, se trouveront en cette sorte.

Pl. 10, fig. 40.

Ayant fait la ligne GL égale à la ligne KF, décrivez du centre G & de l'intervalle LC, l'arc de cercle MN, puis du centre F, & de l'intervalle KE un autre arc de cercle, qui coupant le premier MN, donnera le centre M du cercle qui doit toucher les circonférences des deux demi-cercles ABC, ADE, & la perpendiculaire EB. Décrivez aussi du centre H & de l'intervalle FL, un autre arc de cercle, qui coupant le premier MN, donnera le centre N du cercle qui doit toucher la perpendiculaire BE & les deux circonférences ABC, EOC.

REMARQUE.

Si on joint les deux centres M, N, avec les trois F, G, H, par des lignes droites, on aura les deux triangles FMG, GNH, d'un contour égal ; ce contour étant dans chaque triangle égal au diametre AC du plus grand demi-cercle donné ABC, à cause des deux côtés égaux GM, GN, de la base GH égale au rayon AF, ou FD, des rayons égaux MD, NO, & de la base FG égale au rayon EH, ou HO. De plus, le rayon MD, ou NO, est quatrieme proportionnel aux trois lignes AG, AF, FG. Enfin si on joint les droites AO, CD, la ligne AO sera perpendiculaire au rayon HO, ou NO, & touchera par conséquent les circonférences de ces deux rayons au point O : la ligne CD sera aussi perpendiculaire à chacun des deux rayons FD, MD, & touchera par conséquent au point D, les circonférences de ces deux rayons.

D'où l'on peut tirer une autre construction pour la résolution du problême.

PROBLEME XXXVII.

Décrire un triangle dont l'aire & le contour soient un même nombre quarré.

Pl. 10, fig. 41.

AYant fait la base AB de 17 parties prises sur une échelle divisée en parties égales, décrivez de l'extrêmité A, avec l'ouverture de 9 de ces parties, un arc de cercle vers le point C, & un autre arc de cercle de l'autre extrêmité B, avec l'ouverture de 10 des mêmes parties, qui coupera le premier arc de cercle en un point, comme C. Joignez les droites AC, BC, & le triangle ABC sera celui que l'on cherche, son aire & son contour étant chacun 36, dont la racine quarrée est 6.

REMARQUE.

Ce triangle a été trouvé en nombres par le moyen de ces deux triangles rectangles en nombres 72, 135, 153, & 72, 154, 170, qui sont de même hauteur; leurs nombres générateurs sont 12, 3 & 11, 7. Car joignant ensemble ces deux triangles, on a le triangle obliquangle ABC, dont la hauteur CD sera 72 à l'égard de la base AB, qui est 289, & en divisant chaque côté par la racine quarrée 17 de cette base 289, on a les trois côtés 17, 10, 9.

Fig. 42.



PROBLEME XXXVIII.

Faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés, sans en connoître le centre.

IL faut que les trois points proposés ne soient pas dans une même ligne droite, mais qu'ils puissent former un triangle ACB. Pour décrire une circonférence de cercle qui passe par les trois points donnés A, C, B, sans en chercher le centre, on commencera par décrire l'arc de cercle AC en cette sorte.

Pl. 10, fig. 43.

Ayant imaginé les lignes AC, CB, on fera avec une carte ou du carton un angle égal à l'angle ACB, dont les côtés CA, CB, soient prolongés vers A & vers B. Après avoir appliqué cet angle de carton ACB sur l'angle ACB, on décrira l'arc CA en abaissant la pointe C vers A, de façon que le point A soit toujours appliqué le long du côté AC, en même tems que le point B demeurera appliqué le long du côté du carton CB prolongé; le point C par son mouvement décrira l'arc CA.

Le même angle de carton ABC servira à décrire l'autre arc CB: en même tems qu'on abaissera la pointe C vers B, il faut que le point B demeure appliqué le long du côté CB, & que le point A soit appliqué le long du côté AC prolongé. C'est ainsi que la pointe C décrira l'arc de cercle CB.

Mais pour décrire le troisieme arc de cercle AB sur le côté AB, on fera un angle de carton égal à l'angle ABC, dont les côtés seront prolongés vers A & vers C. On observera les mêmes précautions que l'on a observées en décrivant les deux arcs AC CB. La pointe B, par son mouvement de B vers A,

décrira un arc ſoutenu par la ligne AB. Ces trois arcs AC, CB, BA, formeront la circonférence du cercle ACB, que l'on cherchoit, ſans en connoître le centre.

REMARQUE.

Pour décrire l'arc AB, au lieu de faire l'angle de carton égal à l'angle ABC, on peut le faire égal à l'angle BAC, & faire mouvoir la pointe A vers B.

PROBLEME XXXIX.

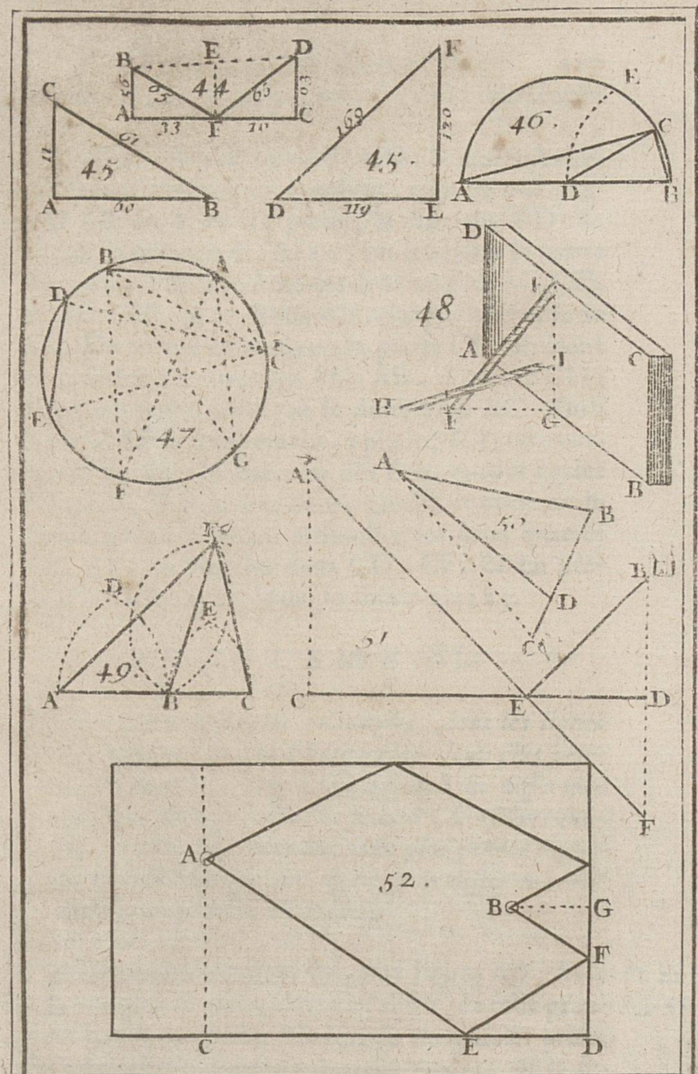
Deux lignes perpendiculaires à une ligne tirée par leurs extrêmités étant données, trouver ſur cette ligne auſſi donnée, un point également éloigné des deux autres extrêmités des deux lignes données.

Pl. 11, fig. 44.

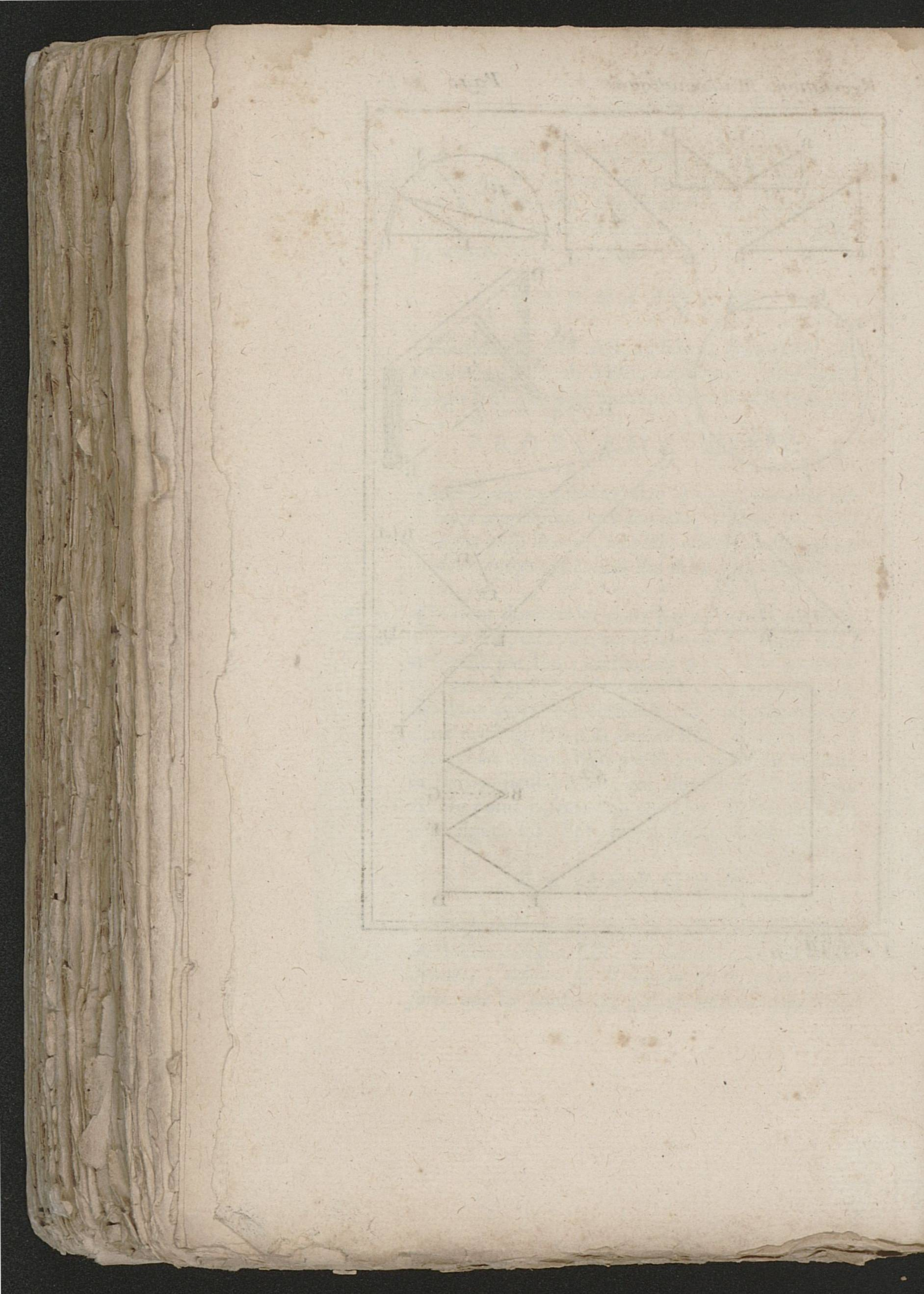
SOient données les deux lignes égales ou inégales AB, CD, perpendiculaires à la ligne AC, qui paſſe par leurs extrêmités A, C. On trouvera ſur cette ligne AC, le point F également éloigné des deux autres extrêmités B, D, en joignant ces deux extrêmités par la droite BD, & en tirant à cette même ligne BD, par E, ſon point du milieu, la perpendiculaire EF, qui donnera ſur la ligne AC le point F, que l'on cherche, de ſorte que les deux lignes FB, FD, ſeront égales entre elles.

REMARQUE.

Ce problême ſe propoſe ordinairement ainſi : *les hauteurs AB, CD, & leur diſtance AC étant données, trouver ſur le terrein AC le point F, en ſorte que les cordes qui ſeront tendues depuis les*



To. I. Pl. 11.



sommets B, D, jusqu'au point F, soient égales entre elles.

Lorsque les hauteurs AB, CD, & leur distance AC seront connues en nombres, comme si la hauteur AB étoit de 56 pieds, la hauteur CD de 63, & la distance AC de 49, on trouvera la partie AF, en ôtant de la somme des deux quarrés AC, CD, le quarré AB, & en divisant le reste par le double de AC. De même on trouvera la partie CF, en ôtant de la somme des quarrés AC, AB, le quarré CD, & en divisant le reste par le double de AC. Ainsi la partie AF se trouvera de 33 pieds, & l'autre partie CF de 16 : & chacune des deux cordes égales FC, FD, se trouvera de 65 pieds, comme on le connoîtra en ajoutant ensemble les deux quarrés AB, AF, ou bien les deux CD, CF, & en prenant la racine quarrée de la somme 4225.

PROBLEME XL.

Décrire deux triangles rectangles, dont les lignes soient telles, que la différence des deux plus petites du premier triangle soit égale à la différence des deux plus grandes du second, & réciproquement que la différence des deux plus petites lignes du second triangle soit égale à la différence des deux plus grandes du premier.

Tirez premierement les deux lignes AB, AC, perpendiculaires l'une à l'autre, de telle grandeur que la premiere AB soit de 60 parties prises sur une échelle divisée en parties égales, & la seconde AC de 11 parties. Alors l'hypoténuse BC se trouvera de 61 parties, comme on le connoîtra, en ajoutant ensemble les quarrés AB, AC, &

Pl. 11, fig. 45.

en prenant la racine quarrée de la ſomme 3721.

Pl. 11, fig. 43. Tirez enſuite deux autres lignes DE, EF, auſſi perpendiculaires l'une à l'autre, dont la premiere DE ſoit de 119 parties, & la ſeconde EF de 120. Alors l'hypothénuſe DF ſe trouvera de 169 parties, comme on le connoîtra en ajoutant enſemble les quarrés DE, EF, & en prenant la racine quarrée de la ſomme 28561. Les deux triangles rectangles ABC, DEF ſatisferont au problême : car la différence 49 des deux plus petites lignes AB, AC, eſt égale à la différence des deux plus grandes DF, EF du ſecond DEF. Réciproquement la différence 1 des deux plus petites DE, EF, du ſecond triangle DEF, eſt égale à la différence des deux plus grandes AB, BC, du premier ABC.

REMARQUE.

Ces deux différences 49, 1, ſe rencontrent ici des nombres quarrés, & elles ſeront toujours telles dans les autres couples de triangles rectangles, qu'on peut trouver par ce canon général, que j'ai tiré de l'algebre. *Le double du produit du plus grand de deux nombres quelconques par leur ſomme, & la ſomme des quarrés des deux mêmes nombres, ſont les deux nombres générateurs de l'un des deux triangles rectangles que l'on cherche. Et le double du produit du plus petit des deux mêmes nombres par leur ſomme & la même ſomme des quarrés, ſont les deux nombres générateurs de l'autre triangle rectangle que l'on cherche.*

De ces trois nombres générateurs, celui qui eſt commun aux deux triangles rectangles, eſt l'hypoténuſe d'un troiſieme triangle rectangle ; l'un des deux autres eſt le contour de ce troiſieme

triangle rectangle, & le troisieme est le même contour, en y changeant le plus grand nombre générateur du troisieme triangle rectangle au plus petit.

PROBLEME XLI.

Diviser la circonference d'un demi-cercle donné en deux arcs inégaux : en sorte que le demi-diametre soit moyen proportionnel entre les cordes de ces deux arcs.

SI le demi-cercle donné est AEB, dont le centre soit D, décrivez par ce centre D, de l'extrêmité B du diametre AB, l'arc de cercle DE; & ayant divisé l'arc BE en deux également au point C, tirez les deux cordes AC, BC, entre lesquelles le demi-diametre AD, ou CD, sera moyen proportionnel.

Pl. 11, fig. 46.

REMARQUE.

Il est évident que l'arc BE est de 60 degrés, par conséquent sa moitié BC, ou CE, est de 30 degrés, & l'autre arc AEC de 150 degrés. D'où il est aisé de conclure, que le sinus d'un arc étant la moitié de la corde d'un arc double, & la moitié du rayon ou sinus total étant le sinus d'un arc de 30 degrés, ce sinus d'un arc de 30 degrés est moyen proportionnel entre le sinus d'un arc de 15 degrés & le sinus de son complément, ou le sinus d'un arc de 75 degrés.



PROBLEME XLII.

Une échelle d'une longueur connue étant appuyée par le haut contre une muraille, & en étant éloignée par le pied d'une certaine distance, trouver de combien elle descendra lorsqu'on l'éloignera davantage du pied de la même muraille.

Pl. 11. fig. 48.

SUpposons que l'échelle EF, qui est appuyée contre la muraille ABCD, soit longue de 25 pieds, & éloignée du pied de la même muraille de 7 pieds, en sorte que la ligne FG, qui est perpendiculaire à la muraille, soit de 7 pieds. Supposons encore qu'on éloigne cette échelle de F vers H, de 8 pieds, en sorte qu'ayant la situation HI, la partie FH soit de 8 pieds, & toute la ligne GH par conséquent de 15 pieds; alors l'échelle sera descendue de la ligne EI, que l'on trouvera en cette sorte.

Multipliez la longueur EF de l'échelle par elle-même, c'est-à-dire, 25 par 25, pour avoir son quarré 625. Multipliez aussi la longueur FG par elle-même, c'est-à-dire, 7 par 7, pour avoir son quarré 49, qu'il faut ôter du quarré précédent 625. Le reste 576 sera le quarré de la hauteur EG, à cause du triangle EFG rectangle en G. C'est pourquoi si on prend la racine quarrée de ce reste 576, on aura 24 pieds pour la hauteur EG.

Multipliez pareillement la longueur HI par elle-même, ou 25 par 25, pour avoir son quarré 625. Multipliez aussi la longueur HG par elle-même, ou 15 par 15, pour avoir son quarré 225, lequel étant ôté du précédent quarré 625, il restera 400 pour le quarré de la hauteur IG. C'est pourquoi si on

on prend la racine quarrée de ce reste 400, on aura 20 pour la hauteur IG. Cette hauteur étant ôtée de la hauteur EG, qui a été trouvée de 24 pieds, le reste donnera 4 pieds pour la ligne EI que l'on cherche.

PROBLEME XLIII.

Mesurer une distance accessible sur la terre par le moyen de la lumiere & du bruit d'un canon.

FAites avec une balle de mousquet un pendule long de 11 pouces & 4 lignes, en prenant cette longueur depuis le centre de mouvement jusqu'au centre de la balle : & au moment que vous appercevrez la lumiere du canon, qui doit être au lieu dont vous cherchez la distance du lieu où vous êtes, mettez le pendule en branle, en sorte que les arcs des vibrations ne passent pas 30 degrés. Enfin multipliez par 100 le nombre des vibration simples qui se seront faites depuis le moment que vous avez apperçu la lumiere jusqu'à celui où vous avez entendu le bruit du coup de canon : le produit donnera, en toises de Paris, la distance du lieu où vous êtes au lieu où l'on a tiré ce coup de canon.

REMARQUE.

C'est à peu près de la même maniere qu'on pourra mesurer la hauteur d'une nuée, lorsqu'elle est proche du zenit, & qu'il y fait des éclairs & du tonnerre; mais cette maniere de mesurer une telle distance est fort incertaine : je ne l'ai indiqué ici que par récréation.

Elle sera plus certaine, lorsqu'on voudra mesu-

rer une médiocre distance sur la terre, dont les extrêmités sont tellement situées, que de l'une on ne peut voir l'autre : mais au lieu du canon, il sera plus commode de se servir de l'arquebuse, dont le son se porte à la distance de 230 toises en une seconde de tems.

Ainsi, pour mesurer cette distance, il faut par le moyen d'une horloge à pendule compter les secondes de tems qui se seront écoulées entre la lumiere de l'arquebuse, qui aura été tirée à l'une des deux extrêmités de la distance proposée, & le son qui sera parvenu aux oreilles d'une personne qui doit être à l'autre extrêmité de la même distance ; car en multipliant le nombre des secondes par 230, on aura en toises la longueur de la ligne proposée.

Il n'est point nécessaire de se servir des secondes d'une pendule; on peut s'en tenir aux vibrations simples du pendule fait avec une balle de mousquet. Celui qui est au pendule tire un coup, en mettant le pendule en branle ; l'autre, qui est à l'extrêmité de la distance à mesurer, tire si-tôt qu'il l'entend, & le premier arrête le pendule dès qu'il entend le coup du second. Cette observation faite, si on multiplie le nombre des vibrations par 100, on a en toises le double de la distance ; sçavoir, l'aller & le revenir du son; & si l'on prend la moitié, on a la distance qu'on vouloit mesurer.

On a déja remarqué qu'en mettant le pendule en branle, il ne falloit pas lui faire décrire un arc plus grand que 30 degrés : on doit ajouter que les 22 vibrations du pendule font une lieue moyenne de France, telle qu'on en compte deux depuis le grand châtelet de Paris jusqu'à la porte de l'église de l'abbaye de saint Denis.

M. de la Hire vouloit que le pendule ne fût long que de 9 pouces, & qu'on en multipliât les vibrations par 90 toises.

Le pere Schot dit que par plusieurs expériences on a connu qu'un boulet de gros canon, pointé horisontalement, fait une lieue d'Allemagne de 4000 pas géométriques en deux secondes de tems; ce qui peut servir aussi pour mesurer une distance sur la terre, s'il est vrai que la vîtesse du son est égale à celle du boulet; car ainsi l'on pourra dire que la distance en pas géométriques est au tems en secondes, entre la lumiere & le coup entendu, comme 4000 est à deux, comme 2000 à 1, &c.

PROBLEME XLIV.

Mesurer la surface d'un parallelogramme.

I.

SOit un parallelogramme rectangle ABCD, dont l'un des côtés AB est de 8 toises, & l'autre AC est de 6 toises, on veut sçavoir combien il contient de toises dans sa surface: il suffit pour cela de multiplier le côté AB, 8, par le côté AC, 6, le produit 48 est le nombre des toises que contient la surface du parallelogramme rectangle ABCD.

Plan. 2. fig. 2.

II.

Si le parallelogramme est obliquangle, comme EIFH, dont un des côtés EF est de 3 toises, & l'autre FH est de 10; du sommet de quelqu'un des angles, comme de E, il faut abaisser la perpendiculaire FG, qui se trouve être ici de 2 toises, on multipliera ces 2 toises par les 10 que con-

Plan. 2. fig. 3.

tient le côté FH, sur lequel on a abaissé la perpendiculaire : le produit 20 est le nombre des toises que contient la surface du parallelogramme obliquangle EIFH.

Procès à décider.

Plan. 2. fig. 4, & 5.

Caïus avoit un champ parfaitement quarré, dont chaque côté étant de 6 toises, le circuit par conséquent étoit de 24 toises. Sempronius voulant s'en accommoder, il propose à Caïus de l'échanger pour une piece de terre qui avoit aussi 24 toises de circuit, mais qui n'étoit point parfaitement quarrée : c'étoit un parallelogramme rectangle, dont un des côtés avoit 3 toises de large, & l'autre avoit 9 toises de long.

Caïus ne sçavoit point de géométrie, & il avoit été trompé par le raisonnement captieux de Sempronius, qui lui assuroit que les figures qui ont un même circuit, sont égales entr'elles. Dans la suite ses amis lui firent connoître qu'il avoit été la dupe de Sempronius, qui lui avoit donné un champ qui ne contenoit que 27 toises, en échange d'un qui en contenoit 36.

La contestation fut portée devant le Juge du lieu, qui après avoir pris l'avis d'un arpenteur, déclara que Caïus avoit été surpris, & par conséquent que l'échange étoit nul.

REMARQUE.

Entre deux quarrés parfaits, dont l'un a le côté double du côté de l'autre, celui-là est quadruple de celui-ci. Qu'on propose deux quarrés, dont l'un ait pour côté 6 pieds, & l'autre 3, le quarré

qui a 6 pour côté, eſt quadruple de celui qui a 3 pour côté; car le premier contient 36 pieds de ſurface, le ſecond en contient 9, qui eſt le quart de 36.

PROBLEME XLV.

Meſurer la ſurface d'un cercle.

IL faut connoître le diametre du cercle, & ſa circonférence; multiplier le demi-diametre ou rayon par la moitié de la circonférence, ou bien toute la circonférence, par le quart du diametre; le produit ſera la ſurface du cercle.

Voyez le prob. XII, p. 285.

I.

Si l'on n'avoit que le diametre d'un cercle, & qu'il fût difficile de meſurer ſa circonférence, il faudra, pour l'obtenir, faire une regle de trois, dont le premier terme ſera 7, le ſecond 22, & le troiſieme ſera le diametre du cercle dont on cherche la ſurface. La regle étant faite, on aura pour quatrieme terme la circonférence du même cercle. On ſçait, par exemple, que le diametre d'un baſſin eſt de 28 pieds; pour avoir ſa circonférence, il faut multiplier 28 par 22, & diviſer le produit 616 par 7, le quotient 88 eſt le nombre des pieds que contient la circonférence de ce baſſin. Ainſi pour avoir ſa ſurface, on multipliera 44, moitié de ſa circonférence, par 14, moitié du diametre, ou toute la circonférence 88 par 7, quatrieme partie du diametre 28; le quotient 616 donnera le nombre des pieds de la ſurface du cercle.

II.

Au contraire, il peut arriver qu'on connoiſſe la

circonférence, ſans connoître le diametre du cercle ; pour lors il faut faire une regle de trois, dont le premier terme ſera 22, le ſecond 7, & le troiſieme ſera la circonférence connue : la regle faite donnera un quatrieme terme, qui ſera le diametre cherché.

On a meſuré le circuit d'une tour, que je ſuppoſe être 88 toiſes : pour avoir ſon diametre, on multipliera 88, circuit de la tour, par 7, & l'on diviſera le produit 616 par 22 : le quotient 28 ſera le nombre des toiſes que contiendra le diametre de la tour.

III.

On peut encore avoir la ſurface d'un cercle en faiſant cette regle de trois : comme 14 eſt à 11, ainſi le quarré du diametre du cercle eſt à un quatrieme nombre, qui ſera la ſurface du cercle cherché.

REMARQUE.

Ce qu'on a remarqué des quarrés doit auſſi s'entendre de deux cercles dont l'un auroit le diametre double du diametre de l'autre : je veux dire que celui qui a le diametre double, a une ſurface quadruple de la ſurface de l'autre. Si, par exemple, un cercle a 6 pieds de diametre, & qu'un autre en ait 3, la ſurface de celui qui a 6 pieds de diametre, eſt à la ſurface de celui qui a 3 pieds de diametre, comme 36 à 9, ou 4 à 1. On doit appliquer à la circonférence ou au circuit, ce qu'on vient de dire du diametre.

QUESTION I.

Une cuisiniere étant allée au marché, convient qu'on lui donnera pour un certain prix autant de bottes d'asperges qu'elle en pourra lier avec une ficelle d'un pied de long ; il se trouve qu'elle en a eu quatre bottes. Le lendemain ayant besoin d'une plus grande quantité d'asperges, elle retourne au marché, avec une ficelle longue de deux pieds. Elle offre le double du prix qu'elle a donné le jour précédent, pour avoir autant de bottes d'asperges qu'elle en pourra lier avec la ficelle de deux pieds de long. On demande si elle n'auroit que 8 bottes d'asperges.

SUivant les remarques précédentes, elle doit avoir seize bottes d'asperges; car la ficelle étant double, elle fait un quarré ou un cercle dont le circuit est double : par conséquent la surface en sera quadruple; c'est-à-dire, que le lien qui est double contiendra quatre fois plus que le simple.

La méthode, pour résoudre ces sortes de questions, est de faire une regle de trois, dont le premier terme est le quarré de la chose proposée, le second la chose qui est contenue, & le troisieme le quarré de la chose dont on veut sçavoir le contenu. Comme dans cet exemple, si 1, quarré de 1, mesure du lien, donne 4 bottes d'asperges, combien 4, quarré de 2, mesure du second lien, dont on veut sçavoir le contenu?



QUESTION II.

Une corde de 10 pieds de long entoure 200 piques, on veut sçavoir combien une corde de 8 pieds de long entourera de piques.

ON trouvera par la regle qu'on vient de proposer, que la corde de 8 pieds entourera 128 piques, en faisant cette regle de 3 : si 100, quarré de 10, donne 200, combien 64, quarré de 8, longueur de la corde dont il est proposé de connoître ce qu'elle doit contenir de piques ?

QUESTION III.

Sempronius a emprunté de Caïus un sac de blé qui avoit 5 pieds de haut & 4 pieds de large : quand il fallut rendre le blé, Sempronius prit quatre sacs hauts de 5 pieds, & larges d'un pied seulement. Sempronius rendit-il à Caïus tout le blé qu'il avoit emprunté ?

IL s'en faut de beaucoup, Sempronius ne rendit que le quart du blé que Caïus lui avoit prêté.

QUESTIONS IV. V. VI.

ON ne fera que proposer les questions suivantes : il sera aisé de résoudre, par les principes qu'on a posé, non-seulement celles qu'on va lire, mais encore plusieurs autres qui sont de la même nature.

Un particulier a pour son usage un pouce d'eau : il reçoit du magistrat la permission d'en avoir une fois davantage : il n'y a point de doute que si ce

particulier faisoit faire un tuyau qui eût deux pouces de diametre, il auroit quatre fois plus d'eau.

Une vieille ayant acheté des marrons plein un sac pour un certain prix ; elle en demande pour le prix double, dans un sac qui a deux fois plus détoffe dans son circuit, quoiqu'il soit de la même hauteur que le premier; elle aura quatre fois plus de marons.

Si on défonce deux futailles, & qu'on en fasse une seule des douves de ces deux futailles, la futaille faite des deux contiendra quatre fois plus de vin que l'une des deux n'en contenoit.

PROBLEME XLVI.

Tracer un ovale sur le terrein.

L'Ovale a deux diametres, dont l'un CD est plus grand que l'autre EG. Sur le plus grand CD on choisit deux points A, B, qu'on appelle foyers, qui sont également éloignés des extrêmités C, D, du grand diametre. On plante à ces deux points deux jalons ou piquets, ausquels on attache un cordeau AHB : ce cordeau doit être de la même grandeur que le diametre CD : on le replie avec un troisieme jalon, ou un bâton tel que vous voyez en H, & l'on conduit ce bâton, en tenant toujours le cordeau également tendu, depuis C par HE, jusqu'en D. Ensuite on repasse le cordeau de l'autre côté du diametre CD, on trace de la même façon l'autre côté CGD, & l'on a un ovale CEDG tracé sur le terrein. On l'appelle l'ovale du jardinier, parce que c'est de cette maniere que les jardiniers le tracent.

Plan. 2. fig. 6.

REMARQUE.

Si on vouloit tracer un cercle, au lieu de mettre deux jalons A, B, au foyer de l'ovale, il suffiroit d'en mettre un en C, centre du cercle, on plieroit un cordeau de la longueur du rayon CD, on y attacheroit un jalon en D, & l'on feroit mouvoir ce cordeau autour du jalon planté en C, de maniere que le jalon D traceroit un cercle en tenant toujours le cordeau également tendu.

PROBLEME XLVII.

Mesurer la surface d'un ovale.

APrès avoir multiplié les deux diametres, vous ferez une regle de trois, dont le premier terme sera 14, le second 11, & le troisieme sera le produit des deux diametres de l'ovale dont on cherche la surface. Comme si le grand diametre CD est de 16 pieds, & que le petit soit de 9 pieds, on multipliera 9 par 16, le produit sera 144. Ensuite on divisera par 14 le produit 1584 de 144 par 11, & le quotient $113 \frac{1}{7}$ sera la surface de l'ovale CEDG.

Plan. 2, fig. 6.





PROBLEMES DE MUSIQUE.

LA musique a pour objet le son, en tant qu'il est agréable à l'organe de l'ouie. Le son est causé par les vibrations & frémissemens du corps sonore, ou de ses parties, qui étant ordinairement transmis à l'oreille par le moyen de l'air, excitent une sensation agréable ou désagréable. On peut considérer un son seul, ou comparer plusieurs sons ensemble.

L'impression qu'un seul son cause à l'oreille est forte ou foible : elle peut aussi être plus vive ou moins vive.

Lorsque deux ou plusieurs corps sonores forment des sons, si les vibrations des uns & des autres sont telles qu'elles s'accordent ensemble de tems en tems, & par conséquent leurs impressions, cette union d'impression s'appelle *accord*. Cet accord peut donc être exprimé par des nombres, puisque ce n'est que le rapport du nombre des vibrations d'un autre corps sonore entre les unions d'impressions. Si, par exemple, deux sons réunissent leurs impressions dans un certain tems après cinq vibrations de l'un & six de l'autre, ce rapport de 5 à 6 des vibrations de ces deux corps sonores, exprimera un accord.

Les accords se divisent en consonnances & en dissonnances. Les consonnances sont des accords

agréables à l'ouie par eux-mêmes ; on les exprime par de petits nombres, comme de 2 à 3. Les dissonnances sont des accords qui sont désagréables ; on les exprime par de grands nombres, comme de 15 à 16.

On considere donc dans la musique : 1°. Le son, qui se divise en tons & en demi-tons 2°. La durée de ces tons & demi-tons, qui est ce qu'on appelle la *mesure*. 3°. Les accords de ces tons ou demi-tons, avec d'autres qui en sont éloignés dans de certaines distances, & qui frappent l'oreille de différens tons en mêmes tems ; ce qui s'appelle *harmonie*.

Les accords peuvent encore être exprimés par des cordes également grosses & également tendues : par exemple, cet accord $\frac{3}{2}$ peut être marqué par la longueur de deux cordes également grosses & tendues ; de sorte que la longueur de la corde qui fait le son plus grave aura trois parties, telles que la corde qui fait le son plus aigu en aura deux ; car il est à remarquer que les vibrations des cordes sont en raison réciproque de leurs longueurs, c'est-à-dire que la corde qui a trois parties, fait deux vibrations, & par conséquent un son plus grave, tandis que celle qui a deux parties fait trois vibrations, & par conséquent un son plus aigu.



PROBLEME I.

Faire sur les accords les quatre opérations de l'arithmétique.

I.

POur ajouter deux accords $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{5}$, on multipliera les numérateurs ensemble, & les dénominateurs ensemble ; le produit $\frac{18}{10}$ ou $\frac{9}{5}$ est la somme des accords proposés.

II.

Pour ôter un accord $\frac{6}{5}$ d'un autre $\frac{3}{2}$, on renversera les termes de l'accord à ôter $\frac{6}{5}$ en écrivant $\frac{5}{6}$, on ajoutera ensemble les accords $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{6}$, la somme $\frac{15}{12}$ ou $\frac{5}{4}$, sera la différence des deux accords proposés.

Remarquez que si l'on ôtoit un grand accord $\frac{3}{2}$ d'un petit $\frac{6}{5}$, on auroit $\frac{12}{15}$ ou $\frac{4}{5}$, qui est le même accord que le précédent, mais renversé.

III.

Pour multiplier un accord, on prendra les puissances des deux termes de cet accord. Si on veut doubler l'accord $\frac{3}{2}$, on prendra le quarré $\frac{9}{4}$: si on veut le tripler, on prendra le cube $\frac{27}{8}$, & ainsi des autres.

IV.

Pour diviser un accord, on prendra la racine quarrée, cubique, &c. de cet accord. Ainsi pour

avoir la moitié de l'accord $\frac{9}{4}$, il en faut prendre la racine quarrée $\frac{3}{2}$. De même, pour avoir le tiers de l'accord $\frac{27}{8}$, ou, ce qui est la même chose, pour le diviser par 3, il en faut prendre la racine cubique, qui est $\frac{3}{2}$, &c.

Si on proposoit de diviser en quatre parties cet accord $\frac{16}{15}$, qui n'est point une quatrieme puissance, il faudroit multiplier les termes de cet accord par 4, on auroit $\frac{64}{60}$, & prendre entre 64, 60, deux autres termes qui eussent la même différence que les termes proposés, comme $\frac{63}{62}$, qui sera sensiblement le quart de l'accord $\frac{16}{15}$. De même, pour diviser l'accord $\frac{33}{31}$, en 7 parties, on multipliera ces nombres par 7, & l'on aura $\frac{231}{217}$, entre lesquels on prendra $\frac{225}{223}$, qui sera sensiblement la septieme partie de l'accord proposé. Ainsi des autres.

PROBLEME II.

Exprimer les accords par logarithmes.

POur avoir l'accord $\frac{3}{2}$ en logarithmes, on cherchera les logarithmes de 3 & de 2, qui sont o. o. $\frac{4771212}{3010300}$, ou en retranchant les trois derniers chiffres des logarithmes, on aura o. o. $\frac{4771}{3010}$, & en ôtant le petit logarithme du grand, on aura o. o. $\frac{1761}{0000}$, ou simplement o. 1761, qui exprimera en logarithmes l'accord $\frac{3}{2}$.

REMARQUE.

Quand on a les accords exprimés en logarithmes, on peut les ajouter & les soustraire par la regle ordinaire, c'est-à-dire, par l'addition & la soustraction. Comme si l'on avoit ces deux loga-

rithmes o. 1249 ($\frac{4}{3}$) o. 1761 ($\frac{3}{2}$) on aura auſſi leur ſomme o. 3010, en les ajoutant enſemble, & leur différence o. 0512 en ôtant o. 1249 de o. 1761. Mais pour multiplier un accord, il faut multiplier le logarithme par le nombre propoſé : ainſi pour quadrupler l'accord o. 1761 ($\frac{3}{2}$) on multipliera o. 1761 par 4, & le produit o. 7044 eſt le quadruple de l'accord propoſé $\frac{3}{2}$. Au contraire, pour diviſer un accord o. 3010 ($\frac{2}{1}$) en douze parties, on prendra la douzieme partie du logarithme o. 3010, qui eſt o. 0251.

PROBLEME III.

Partager l'intervalle de l'octave en ſept autres intervalles ſimples, qui ſont les tons & demi-tons.

LE plus ſimple de tous les accords s'exprime par ce rapport $\frac{1}{1}$; il s'appelle l'uniſſon : le rapport ſuivant $\frac{2}{1}$ s'appelle octave. L'uniſſon & l'octave ont tant de rapport enſemble, que les muſiciens les prennent indifféremment l'un pour l'autre. Cet autre rapport $\frac{4}{1}$ s'appelle double octave ; celui-ci $\frac{8}{1}$ ſe nomme triple octave, & ainſi de ſuite.

L'octave peut être diviſée de deux manieres, numériquement ou géométriquement : on donnera ces deux diviſions dans les deux articles ſuivans.

I.

Pour diviſer l'octave numériquement, 1°. doublez les termes de l'octave $\frac{2}{1}$, vous aurez $\frac{4}{2}$; prenez le nombre 3, qui eſt entre les termes 2, 4;

formez-en deux rapports avec les mêmes termes 4, 2, & l'octave se trouvera divisée en $\frac{3}{2}$, qui est la quinte, & $\frac{4}{3}$, qui est la quarte.

2°. Doublez les termes de la quinte $\frac{3}{2}$, vous aurez $\frac{6}{4}$, prenez le nombre 5, qui est entre ces termes, 4, 6, formez-en deux autres rapports avec les mêmes termes 4, 6, & la quinte sera divisée en $\frac{5}{4}$, qui est la tierce majeure, & $\frac{6}{5}$, qui est la tierce mineure.

3°. Doublez les termes de la tierce majeure $\frac{5}{4}$, vous aurez $\frac{10}{8}$; prenez le nombre 9, qui est entre ces termes, 8, 10, formez-en deux rapports avec les mêmes termes, 8, 10, & la tierce majeure se trouvera divisée en $\frac{9}{8}$ qui est le ton majeur, & $\frac{10}{9}$ qui est le ton mineur. Ces deux tons sont les premieres dissonnances nées de ces divisions.

4°. Pour trouver la division de la quarte $\frac{4}{3}$, ôtez-en * la tierce majeure $\frac{5}{4}$, le reste sera le demi-ton majeur $\frac{16}{15}$, ainsi la quarte contiendra la tierce majeure $\frac{5}{4}$, & le demi-ton majeur $\frac{16}{15}$.

*Probl. I. art. II. pag. 333.

5°. Pour connoître la division de la tierce mineure $\frac{6}{5}$, ôtez-en le ton majeur $\frac{9}{8}$, le reste sera le demi-ton majeur $\frac{16}{15}$, & de cette maniere la tierce mineure contiendra le ton majeur $\frac{9}{8}$, & le demi-ton majeur $\frac{16}{15}$.

Ainsi l'octave se divisant en quinte & quarte, la quinte se divise en tierce majeure, & en tierce mineure : la tierce majeure en ton majeur & en ton mineur; & la tierce mineure en ton majeur & en demi ton majeur. De même la quarte se divise en tierce majeure & en demi-ton majeur; cette tierce majeure a déja été divisée en ton majeur & en ton mineur; par conséquent l'octave contient trois tons majeurs, deux tons mineurs & deux demi-tons majeurs.

C'est

C'eſt ce qu'on comprendra mieux en jettant les yeux ſur la table qu'on a joint ici, où toutes les diviſions que contient l'octave ſe trouvent les unes ſous les autres dans la derniere colonne à main droite. Ce qu'on dira dans l'article ſuivant ſervira encore d'éclairciſſement à ce qu'on vient de dire.

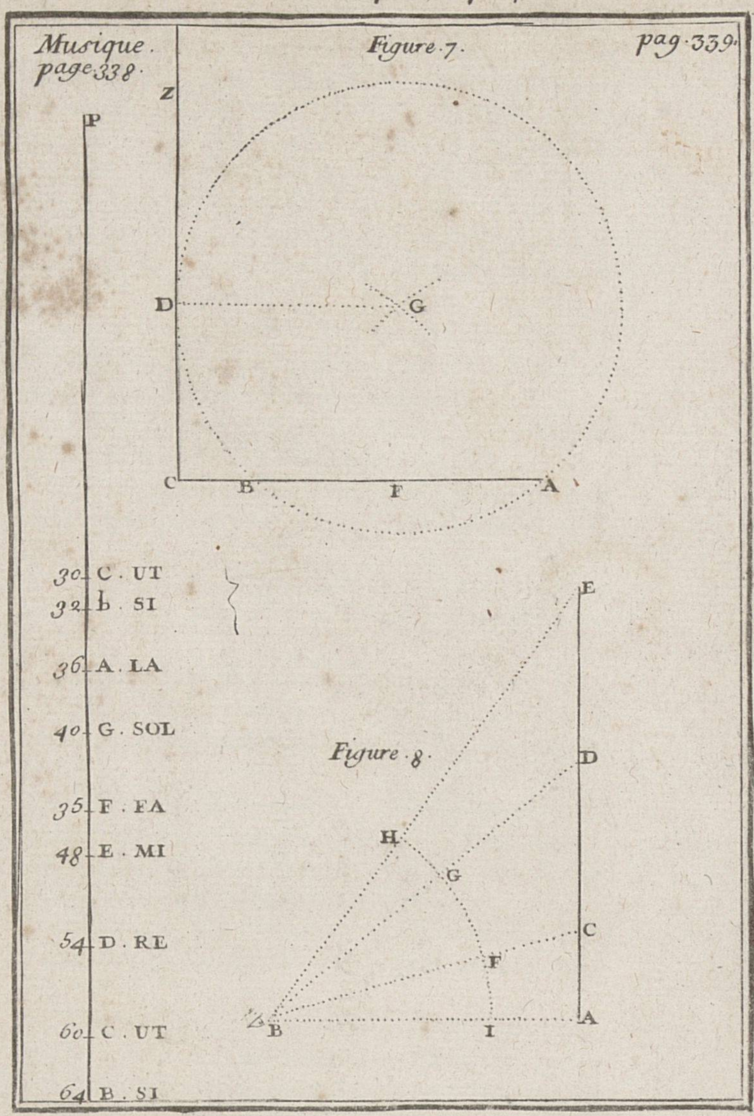


- *Octave.* $\frac{2}{1}$ ou $\frac{4}{2}$
  - *Quinte.* $\frac{3}{2}$ ou $\frac{6}{4}$
    - *Tierce majeure.* $\frac{5}{4}$ ou $\frac{10}{8}$
      - *Ton majeur.* $\frac{9}{8}$
      - *Ton mineur.* $\frac{10}{9}$
    - *Tierce mineure.* $\frac{6}{5}$
      - *Ton majeur.* $\frac{9}{8}$
      - *Demi-ton majeur.* $\frac{16}{15}$
  - *Quarte.* $\frac{4}{3}$
    - *Tierce majeure.* $\frac{5}{4}$
      - *Ton majeur.* $\frac{9}{8}$
      - *Ton mineur.* $\frac{10}{9}$
    - . . . . *Demi-ton mineur.* $\frac{16}{15}$

Après avoir donné la division de l'octave en nombres, on va la donner géométriquement en l'appliquant à une corde.

II.

Plan. 12. Pour diviser l'octave géométriquement, soit PB une corde tendue, & de telle longueur qu'il vous plaira. 1°. Divisez-la également en *b*, le point *b* marquera l'octave, c'est-à-dire, que si l'on mettoit un chevalet en *b*, la partie P*b* fera



Musique.
page 338.
Figure 7.
pag. 339.
Z
P
D
G
C
B
F
A
30 C. UT
32 b. SI
36 A. LA
40 G. SOL
35 F. FA
48 E. MI
54 D. RE
60 C. UT
64 B. SI
Figure 8.
E
D
H
G
C
F
B
I
A

To. I. Pl. 12.

2.



l'octave avec toute la corde PB. Pour mieux entendre ce qui vient d'être dit, il faut concevoir que s'il y avoit deux cordes également grosses & tendues, dont l'une fût égale à PB, & l'autre à P*b*; PB ayant été pincée, feroit une vibration, tandis que P*b* en feroit deux, suivant ce qu'on a dit ci-dessus. On doit supposer la même chose dans la suite.

Il faut faire attention que les deux moitiés de la corde séparées par le chevalet forment l'unisson qu'on a dit être exprimé par ce rapport $\frac{1}{1}$.

2°. Divisez *b*B également en E, alors PE fera la quinte avec P*b*, & la quarte avec PB.

3°. Partagez également *b*E en G, alors PG fera la tierce majeure avec P*b*, & le ton mineur avec PG.

4°. Divisez *b*G également en A, alors PA fera le ton majeur avec P*b*, & la tierce mineure avec PE.

5°. Partagez PG en huit parties égales, & faites GF égale à une de ces huit parties, alors PF fera un ton majeur avec PG, & un demi ton majeur avec PE.

6°. Divisez PE en quatre parties égales, portez-en une en EC, alors PC fera avec PB un demi-ton majeur, & avec PE une tierce majeure. Cette quatrieme partie est la distance AE.

6°. Divisez EC également en D, alors PD fera le ton majeur avec PE, & le ton mineur avec PC.

L'octave se trouve ainsi divisée en 7 intervalles ou 7 accords, qui sont trois tons majeurs, deux tons mineurs & deux demi-tons majeurs. Si on prend P*c*, moitié de PC, qui est son octave, au lieu des divisions de l'octave B*b*, on aura l'oc-

tave Cc, qui contiendra les mêmes intervalles.

REMARQUE.

On a ajouté aux divisions qu'on vient de faire de la corde PB, des nombres, qui étant comparés les uns aux autres, suivant ce qu'on vient de dire, expriment les accords qu'on a trouvé dans l'article précédent. On a d'abord l'octave $\frac{64}{32}$, & les autres accords comme la quinte $\frac{48}{32}$, la quarte $\frac{64}{48}$, &c. Mais en prenant 30, moitié de 60, au lieu d'avoir l'octave de 32 à 64, on a l'octave de 30 à 60.

L'octave & ses divisions prises entre les nombres 30 & 60, s'accordent avec les noms particuliers qu'Aretin, moine Bénédictin, a donné aux sons différens de ces divisions. On les a marqué dans la figure, quoiqu'ils soient assez connus ; on sçait qu'ils ont été tirés des premieres syllabes de chaque hémistiche de l'hymne de saint Jean.

UT queant laxis, REsonare fibris,
MIra gestorum FAmuli tuorum,
SOLve polluti LAbii reatum,
SAncte Joannes.

Si on double les nombres qui sont entre 30 & 60, on aura une seconde octave divisée en ses accords : on auroit une troisieme octave en doublant les nombres de cette seconde octave, & ainsi de suite pour avoir autant d'octaves qu'on voudra.

❀

PROBLEME IV.

Meſurer la durée des tons.

POur meſurer le tems qu'on employe à marquer les tons ſelon leur durée, il faut concevoir un mouvement précipité très-égal, comme le battement de l'artere, ou la vibration d'un pendule, & comptant 1, 2, 3, 4, recommencer toujours à compter de quatre en quatre, afin de ſe faire une juſte idée de ce qu'on appelle un tems de la muſique.

On doit enſuite s'accoutumer la main droite à marquer un mouvement à peu près ſemblable à celui qui vient d'être expliqué, en l'abaiſſant & comptant un, en élevant un peu en dehors & comptant deux, puis trois en la retirant un peu vers ſoi, enfin quatre, en élevant un peu au deſſus de l'endroit où elle étoit au premier temps : obſervant que les quatre divers mouvemens ſoient égaux. On la replacera également où elle étoit au premier, d'où on recommencera à compter 1, 2, 3, 4. Il eſt néceſſaire de s'habituer à ce mouvement, qui ſert de baſe à tous les autres qui ſe font dans la muſique, ou qui en dépendent.

REMARQUES.

Outre ce mouvement réglé de quatre en quatre ; il y a encore une autre meſure qui ſe regle de trois en trois ; en ſorte qu'après avoir compté un en baiſſant la main, on compte deux, comme au ſecond tems de la meſure ci-devant ; mais le troiſieme ſe compte en élevant la main : après quoi

on recommence à compter 1, 2, 3, comme la premiere fois ; & ainsi de suite.

La durée d'un ton est réglée par un ou plusieurs de ces tems, ou par la moitié, le quart ou la douzieme partie d'un tems, ainsi qu'on le marque par les notes ou caracteres qui sont usités dans la musique.

PROBLEME V.

Faire trembler sensiblement & à vue d'œil la corde d'une basse de viole, ou de quelqu'autre instrument, sans que personne y touche.

PRenez une basse de viole, ou autre semblable instrument de musique ; choisissez deux cordes tellement éloignées l'une de l'autre, qu'il y en ait une entre deux : accordez ces deux cordes, sans toucher à celle du milieu. Ensuite touchez un peu fort avec l'archet sur la plus grosse corde, & vous verrez qu'en même tems que celle-ci tremblera, celle qui en est éloignée, mais accordée au même ton, tremblera aussi sensiblement, sans qu'on y touche. Ce qui est très-remarquable, c'est que la corde qui sera au milieu n'aura aucun mouvement, & qu'au-ssitôt qu'on aura mis la grosse corde sur un autre ton, en lâchant ou serrant la cheville, ou bien en mettant le doigt sur quelque endroit de cette corde, l'autre ne tremblera plus. La chose paroîtra encore plus merveilleuse, si on l'execute sur deux basses de viole.

REMARQUES.

Cette merveille ne vient que de ce que ces deux cordes sont tellement tendues, que les vibrations

de l'une répondent aux vibrations de l'autre, en ſorte que la premiere étant ébranlée, la ſeconde ſe trouve auſſi ébranlée par l'entremiſe de l'air, qui reçoit les mêmes frémiſſemens que la groſſe corde, & les communique à l'autre par des vibrations qui leur conviennent; au lieu que la corde du milieu n'étant point accordée avec les deux autres, n'eſt pas ſuſceptible des mêmes vibrations, & par conſéquent ne reçoit aucun mouvement.

On remarque le même effet ſur deux verres que l'on met à l'uniſſon, en verſant de l'eau peu à peu dans celui qui a le ſon plus clair : ſi on frotte le bord de l'un de ces verres avec le doigt mouillé, en ſorte que l'on forme un ſon par ce frottement, l'autre verre, qui doit être aſſez proche, ſera ébranlé : ce que l'on connoîtra par le mouvement d'une épingle tortuée qu'on mettra ſur le bord.

De même ſi deux timbales ſont à l'uniſſon, & que l'on frappe l'une des deux avec leur bâton, on fera ſauter de la monnoie qu'on aura miſe ſur l'autre. On obſerve encore qu'en battant du tambour, les vitres qui ſont à l'uniſſon, en ſont ébranlées, & que dans les lieux où l'on joue d'une baſſe de violon, ou de quelqu'autre inſtrument fort, en mettant la main ſur des planches, ſur la forme d'un chapeau, ou ſur d'autres corps un peu fermes & minces, on les fait frémir, lorſque l'on produit le ſon ſur des cordes qui ſont à l'uniſſon avec ces corps.

On ajoutera ici comme une choſe très-curieuſe, que deux pendules poſées ſur une même tablette, s'accorderont à aller à la même heure, quoique leurs aiguilles n'ayent point été miſes d'abord à la même heure.

AVERTISSEMENT.

M. Sauveur a inventé un ſyſtême de muſique : il diviſe l'octave en 43 parties, qu'il appelle merides, & ces merides ſont encore diviſées en ſept heptamerides, de ſorte que l'octave contient 301 heptamerides : il exprime tous les accords par merides & heptamerides, & il donne des noms de lettres aux différens ſons de l'octave. Ainſi au lieu de UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, UT; il a imaginé ſept noms PA, RA, GA, FO, BO, LO, DO, PA, qu'il applique aux ſept ſecondes de l'octave, dont chaque ton contient 7 merides, chaque demi-ton 4 merides. Pour exprimer les merides & les heptamerides, & pour varier les tons, il change les voyelles de cette gamme en d'autres voyelles, ſelon qu'il veut abaiſſer ou élever ces tons.

Il a encore inventé des notes qui répondent aux différens noms dont ſa gamme eſt ſuſceptible par les changemens de voyelles dont on vient de parler. Ces notes reçoivent auſſi divers changemens, ſoit pour exprimer la durée du tems, ſoit pour exprimer les merides, heptamerides, & même les demi-heptamerides, par rapport à l'élévation & à l'abaiſſement des tons. Elles ſe rangent ſur une ſeule ligne, au commencement de laquelle on met une des clefs, qui ſont encore de l'invention de M. Sauveur, & qui ſervent à marquer les différentes octaves. On peut conſulter ſur ce nouveau ſyſtême le mémoire de l'académie royale des ſciences aux années 1701 & 1702.



PROBLEMES D'OPTIQUE.

L'Optique est une science qui considere les propriétés de la lumiere, & par conséquent les couleurs : elle comprend tout ce qui sert d'objet à la vue.

La lumiere considérée en elle-même, peut être regardée de trois différentes manieres. 1°. En tant qu'elle est directe, c'est-à-dire, que ses rayons sont envoyés du corps lumineux ou coloré vers l'œil. 2°. En tant qu'elle est réfléchie, c'est-à-dire, que ses rayons ayant frappé quelque corps poli, comme un miroir, ils sont renvoyés vers l'œil. 3°. En tant qu'elle est rompue, c'est-à-dire, que ces rayons ayant rencontré un corps transparent, ils le pénetrent en se brisant.

La premiere maniere de considérer la lumiere, sert d'objet à la perspective, qui trompe agréablement l'imagination. Cette partie de l'optique nous apprend à tracer géométriquement sur un plan la représentation des objets selon leurs dimensions & leurs situations différentes; en sorte que ces représentations fassent sur nos yeux le même effet que feroient les objets mêmes dont elles ne sont que les images.

On examine la lumiere réfléchie dans la catoptrique, qui considere les propriétés des miroirs plats, convexes & concaves. Cette partie suppose

que l'angle de réflexion eſt égal à l'angle d'incidence.

La dioptrique conſidere les propriétés de la lumiere rompue; l'expérience apprend qu'un rayon de lumiere paſſant obliquement d'un milieu dans un autre, ſe détourne en s'éloignant ou en s'approchant de la perpendiculaire. Il s'en éloigne, ſi le milieu dans lequel il entre, eſt plus difficile à pénétrer que celui dans lequel il eſt; mais il s'en approche, ſi le milieu dans lequel il paſſe eſt plus aiſé à pénétrer que celui qu'il quitte.

L'optique ſuppoſe auſſi que les objets qui ſont vus ſous de plus petits angles, paroiſſent plus petits; ce qui arrive ordinairement, lorſqu'ils ſont plus éloignés. Sur ces ſuppoſitions, nous réſoudrons pluſieurs problêmes utiles & agréables, comme vous allez voir.

PROBLEME I.

Faire qu'un objet étant vu de loin ou de près, paroiſſe toujours de la même grandeur.

Pla. 11. fig. 47.

POur faire que la ligne AB paroiſſe d'une même grandeur, lorſqu'elle ſera miſe en différens lieux plus ou moins éloignés de l'œil placé en C, il faut décrire un cercle dont la circonférence paſſera par l'œil, & mettre la ligne AB en tel endroit de la circonférence qu'il plaira, comme vous le voyez en ED & AB. Cette ligne étant en ED, qui eſt la ſituation la plus éloignée de l'œil, paroîtra de la même grandeur que ſi elle étoit en AB, qui eſt beaucoup plus proche : car l'œil arrêté en C, voit ces deux lignes égales AB, DE, ſous les angles égaux ACB, DCE.

REMARQUE.

Il est évident que la ligne proposée AB sera toujours vue sous un même angle, & que par conséquent elle paroîtra toujours d'une même grandeur à quelque distance que l'œil soit de cette ligne, pourvu qu'il ne quitte jamais la circonférence du cercle qui passe par les deux extrêmités A, B : ainsi, sans changer la situation de la ligne AB, on peut changer celle de l'œil, en le plaçant en tel point qu'on voudra de la circonférence d'un cercle quelconque qui passe par les deux extrêmités de la ligne, ou grandeur proposée AB, comme en F, ou en G : les angles visuels AFB, AGB, ACB, étant toujours égaux.

Il est aussi évident qu'une même ligne AB paroîtra toujours de la même grandeur en l'approchant de l'œil C, sans la placer dans la circonférence d'un cercle, pourvu que ses deux extrêmités demeurent toujours dans les mêmes rayons visuels AC, BC, comme il arrive en lui donnant la situation AD, parce que dans cette situation elle est vue sous le même angle visuel ACB ; ce qui ne doit point changer sa grandeur apparente, quoiqu'elle soit plus proche de l'œil C. Pla. 11, fig. 50.

PROBLEME II.

La ligne AC étant donnée, & la ligne CZ indéterminée étant perpendiculaire sur AC à son extrêmité C, trouver dans la ligne CZ un point D, d'où la partie AB de la ligne AC soit vue la plus grande qu'elle puisse être vue dans toute l'étendue de la ligne CZ.

Divisez la ligne AB au point F en deux parties égales AF, FB ; des points A & B comme Pla. 12, fig. 7.

centre, & de l'intervalle FC, décrivez deux arcs de cercles qui se couperont en G, du point G menez sur CZ la perpendiculaire GD : le point D sera celui où l'œil étant placé, il verra la ligne AB la plus grande qu'il la puisse voir dans toute l'étendue de la ligne indéterminée CZ : car ayant décrit le cercle ABD, il est aisé de démontrer que l'angle ADB est le plus grand de tous ceux dont le sommet sera dans la ligne CZ, & qui auront pour base la ligne AB. Tous les angles qui sont au dessus ou au dessous de D, sont plus petits que celui qui est en D.

REMARQUE.

Il est clair qu'en quelque point du plus grand arc ADB qu'on place l'œil, la ligne AB sera vue d'une même grandeur, puisqu'elle sera vue sous le même angle.

PROBLEME III.

L'œil étant placé en un point comme B, & regardant vers la ligne AE, couper de cette ligne la partie DE, qui soit vue de la même grandeur qu'une autre partie AC de la même ligne AE.

Pla. 12. fig. 8.

AYant tiré les lignes BA, BC, BE, du point B, comme centre & de l'intervalle BI, pris à volonté, décrivez l'arc de cercle IFH ; faites GH égal à IF ; par le point G, menez la ligne BGD, la partie DE sera vue de la même grandeur que la partie AC, puisqu'elles sont vues sous les mêmes angles.

REMARQUE.

C'eſt par cette égalité des angles viſuels, que l'on peut écrire contre une muraille des caracteres, qui bien qu'inégaux, paroîtront égaux, étant vus d'un certain point, & que l'on peut placer ſur un pinacle, ou ſur quelque haut frontiſpice une ſtatue d'une telle longueur & d'une telle groſſeur, qu'étant vue d'en bas, elle paroiſſe d'une grandeur proportionnée à la hauteur du lieu, ſans qu'il ſoit beſoin de polir extrêmement cette figure, & encore moins de s'arrêter aux muſcles du corps, ni aux plis de la draperie, comme l'on feroit ſi la figure ſe voyoit de plus près.

Lorſqu'on voudra exécuter ce problême ſur une muraille, il faudra d'abord l'exécuter ſur le papier : mais on doit prendre la diſtance du point de vue à la muraille, & la hauteur de la muraille ou de ſes parties, afin de rapporter ces meſures ſur le papier par le moyen d'une échelle. On portera les diſtances trouvées ſur le papier à la muraille, en obſervant de donner autant de toiſes ou de pieds ſur la muraille, qu'on aura trouvé ſur le papier de parties qui correſpondent dans l'échelle aux toiſes, pieds, pouces, &c.

PROBLEME IV.

Trouver un point, duquel deux parties inégales d'une ligne droite paroiſſent égales.

Pla. 11. fig. 49.

Il y a une infinité de points différens, d'où les deux parties inégales AB, BC, de la ligne droite AC, étant vues, peuvent paroître égales, parce qu'ils ſont dans la circonférence d'un cercle : mais

ſans nous arrêter à la théorie, nous enſeignerons ici une méthode très courte pour trouver un de ces points, comme vous allez voir.

Décrivez des deux extrêmités A, B, & de l'intervalle AB, deux arcs de cercle, qui ſe coupent ici au point D, d'où il faudra décrire avec la même ouverture de compas un autre arc de cercle vers F. Décrivez pareillement des deux extrêmités B, C, & de l'intervalle BC, deux arcs de cercles qui ſe coupent ici au point E, & décrivez de ce point E, avec la même ouverture de compas, un autre arc de cercle, qui coupe ici en F celui que vous avez décrit du point D. Ce point F ſera celui duquel les deux lignes propoſées AB, BC, étant vues, paroîtront égales, à cauſe de l'égalité des deux angles viſuels AFB, BFC.

REMARQUE.

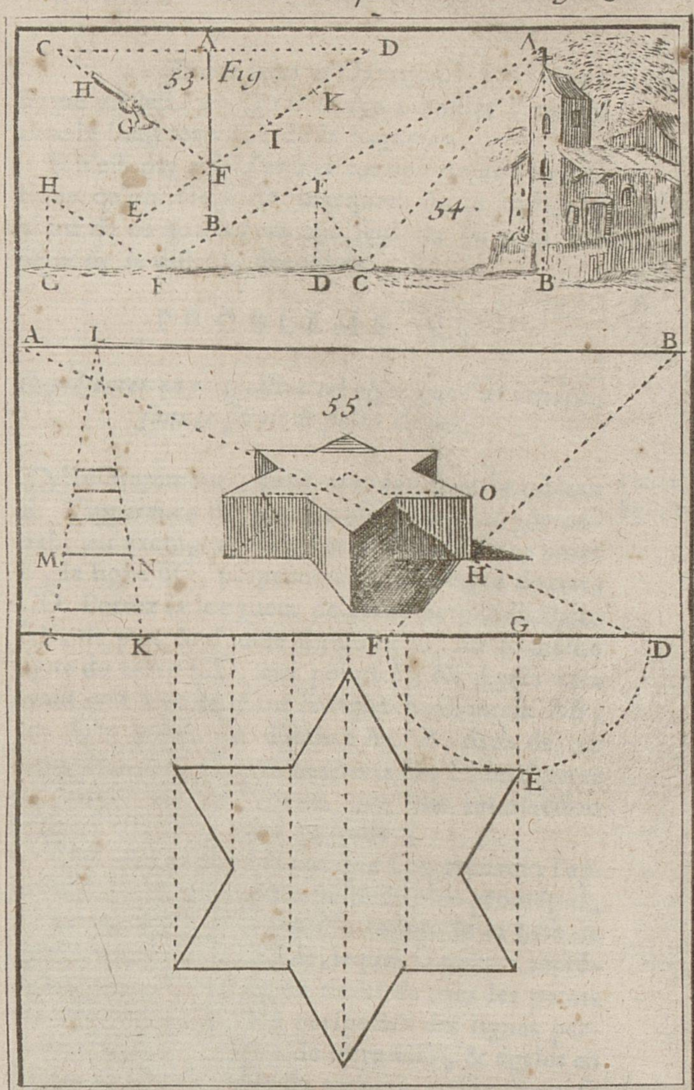
On opérera de la même façon, lorſque les deux extrêmités des deux lignes propoſées AB, BC, ne ſe joindront pas. Nous avons enſeigné dans notre *dictionnaire mathématique*, la maniere de trouver un point, duquel trois parties inégales d'une ligne droite, étant vues, paroîtront égales.

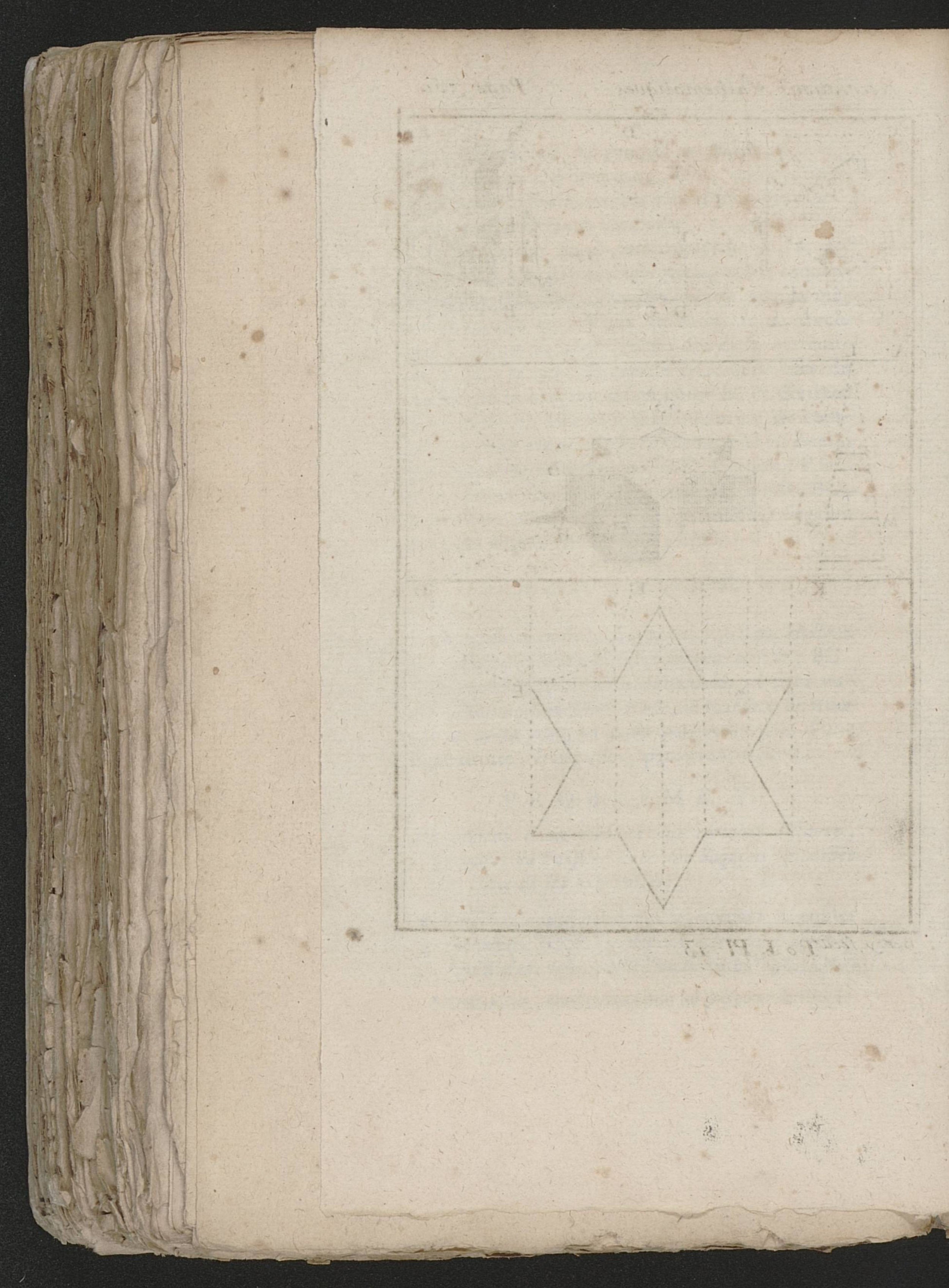
PROBLEME V.

Un anneau étant placé à une certaine diſtance, propoſer de l'enfiler avec une baguette recourbée par l'une de ſes extrêmités.

IL faut 1°. que celui qui ſe prépare à enfiler l'anneau, puiſſe le toucher avec la baguette. 2°. Qu'il n'en voie point l'ouverture.* 3°. Qu'il

* C'eſt-à-dire, que l'anneau doit lui préſenter ſon bord.


C
A
D
A
53 · Fig
H
K
G
I
F
H
E
E
54 ·
B.
G
F
D C
B
A
L
B
55 ·
O
M
N
H
G
C
K
F
D
E



ferme un œil. 4°. Qu'il essaye à enfiler l'anneau avec le bout recourbé de la baguette.

Il n'est pas aisé d'enfiler cet anneau aux conditions qu'on vient de marquer. Cette difficulté vient de ce qu'avec un œil seul on ne peut pas juger de la distance des objets.

PROBLEME VI.

Représenter en perspective tel objet que l'on voudra, sans se servir de point de vue.

Pla. 13, fig. 55.

PRemierement, pour trouver dans le tableau l'apparence de quelque point du plan géométral, par exemple, du point E, tirez de ce point E, la ligne EG, perpendiculaire à la ligne de terre CD. Portez la longueur de cette perpendiculaire GE, de part & d'autre du point G, sur la même ligne de terre CD, aux points F, D. Après cela ayant pris à volonté sur la ligne horisontale AB, les deux points de distance A, B, tirez de ces deux points A, B, par les points D, F, les droites AD, BF, qui donneront par leur intersection l'apparence H du point proposé E.

C'est de la même façon que l'on trouvera l'apparence de quelque autre point du plan géométral, & par conséquent la représentation de la base de quelque corps que ce soit, lequel se pourra représenter en perspective, en tirant de tous les points de son assiette, ou plan perspectif, des lignes perpendiculaires à la ligne de terre CD, & égales en apparence à la hauteur du corps proposé; ce qui se fera en cette sorte.

Ayant porté la hauteur naturelle du corps proposé, sur la ligne de terre CD, par exemple, de

C en K ; tirez de ces deux points C, K, au point L pris à discrétion sur la ligne horisontale AB, les droites LC, LK, qui termineront les hauteurs apparentes de tous les points du corps posé, en tirant de ces points des lignes paralleles à la ligne de terre CD. Comme pour trouver la hauteur du point H, on tirera de ce point H une ligne parallele à CD, qui coupera le triangle LCK, & donnera MN. On portera cette longueur MN en HO, qu'on fera perpendiculaire à CD. Cette ligne HO sera la hauteur apparente du corps représenté dans le tableau.

On fera la même chose à l'égard de tous les autres points du plan perspectif, & les lignes tirées de ces points parallelement à CD, donneront dans le triangle LCK les hauteurs apparentes, qu'il faut élever perpendiculairement à CD à chaque point du plan respectif, comme on vient de le faire.

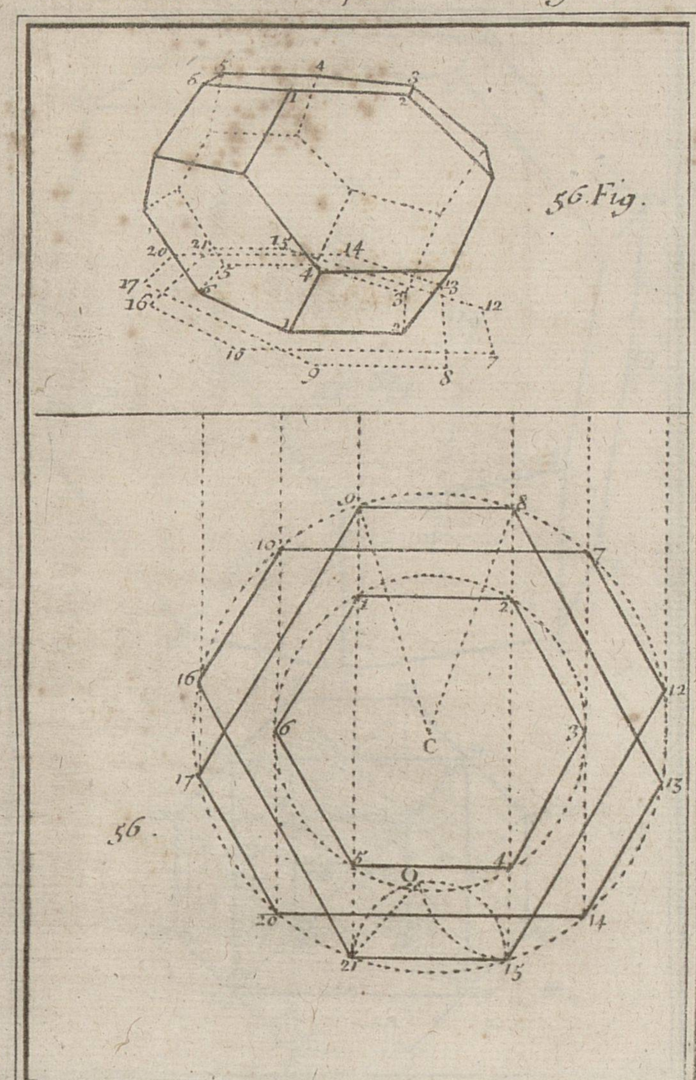
PROBLEME VII.

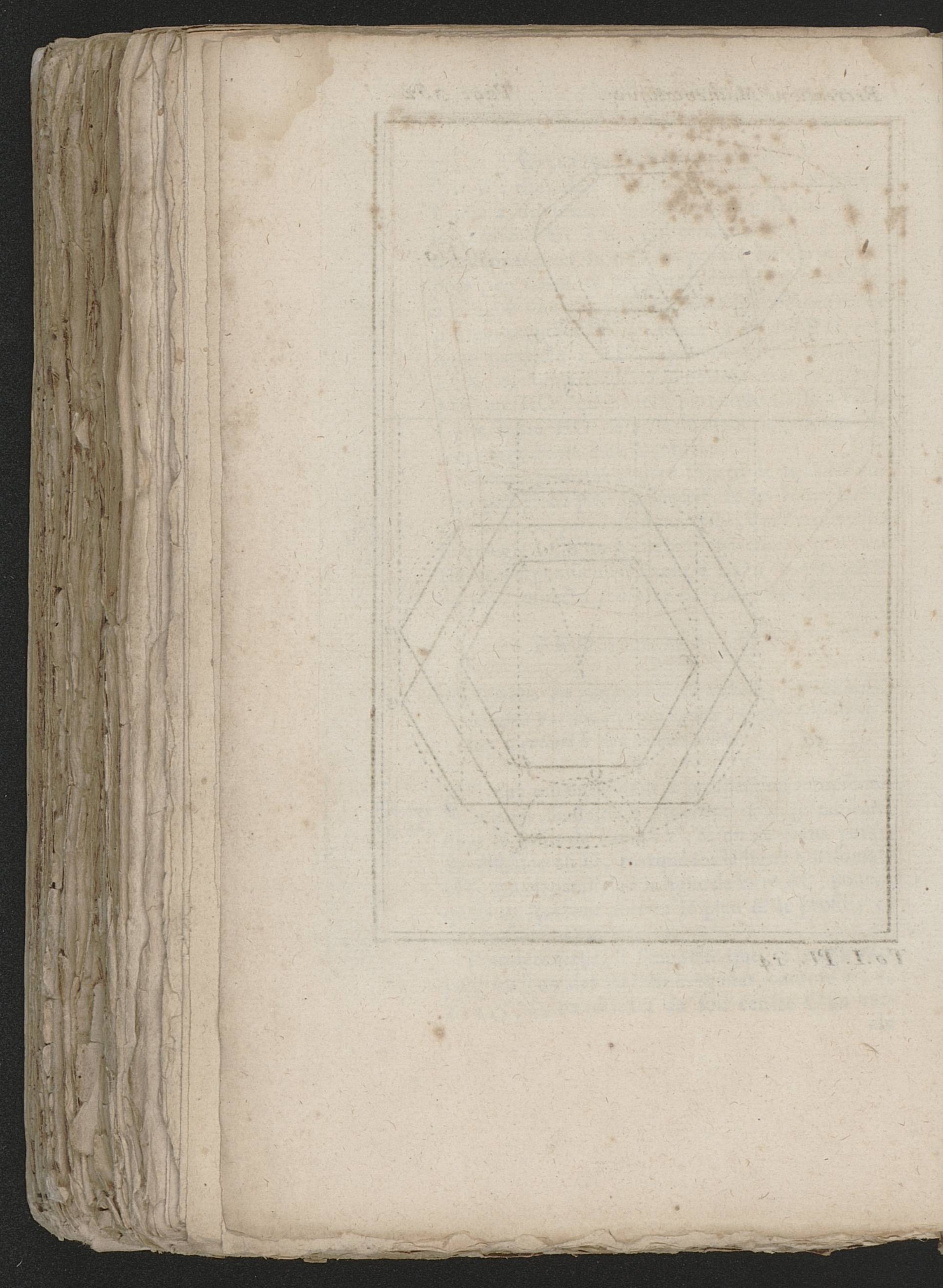
Représenter en perspective un poliedre équilatéral, terminé par six quarrés égaux, & par huit exagones réguliers & égaux entre eux.

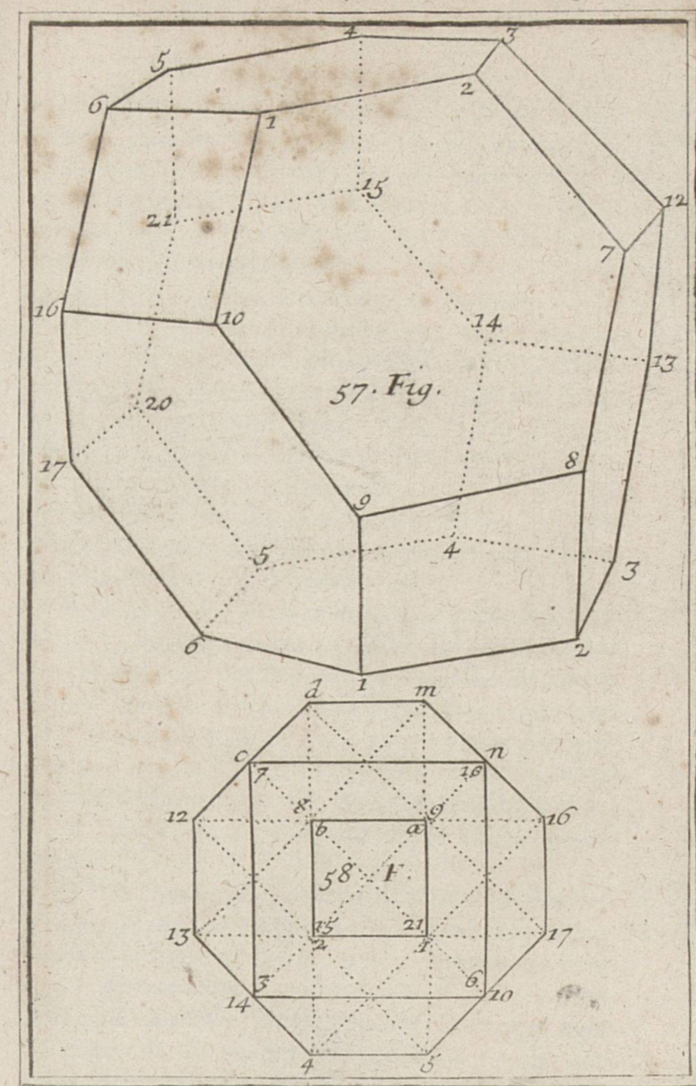
Pla. 14, fig. 56.

CEux qui entendent la perspective représenteront facilement ce corps dans le tableau, dont le point de vue est V, & un des deux points de distance est D, marqué sur la ligne horisontale DV, qui est parallele à la ligne de terre AB, pourvu qu'ils en sçachent décrire le plan & le profil ; ce qui se fera en cette sorte.

Premierement, si l'on veut que ce corps s'appuye sur l'un des ses huit exagones, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, on décrira de son centre C un cercle


56. Fig.
56.
C
O




57. Fig.
58. F.



cle dont le rayon ou demi-diametre C8, ou C9, soit tel, que son quarré soit au quarré de celui de l'exagone, comme 7 est à 3; de sorte que si le rayon ou le côté 1, 2, de l'exagone est de 65466 parties égales, le rayon C8, ou C9, du grand cercle en contiendra 100000.

Pl. 14, fig. 56.

Ayant donc ainsi décrit ce grand cercle, on le divisera inégalement, comme vous voyez dans la figure, en sorte que le plus petit côté 8, 9, & les autres cinq, soient égaux chacun au côté de l'exagone, & que le plus grand 7, 10, & les cinq autres soient doubles chacun du plus petit; auquel cas, le plus petit soutiendra un arc de 38, 12', & le plus grand, ou son double, un arc de 81, 48'. Mais sans cela il sera aisé de décrire ce plan par la seule inspection de la figure.

Pour le profil, décrivez autour du plus petit côté 21, 15, le demi-cercle 21, O, 15, & ayant décrit du point 4, par le point 15, l'arc de cercle 15 O, joignez la droite 21 O, qui sera la hauteur des points 9, 8, 14, 13, 20, 17; la hauteur des points 7, 12, 15, 21, 16, 10, étant égale au double de la ligne 21 O, & la hauteur des points 1, 2, 3, 4, 5, 6, étant au triple de la même ligne 21 O.

Si l'on met en perspective ce plan ainsi décrit, & que de tous ses angles on éleve des perpendiculaires à la ligne de terre, pour y mettre les hauteurs convenables à celles du profil, il n'y aura plus qu'à joindre les côtés, comme vous voyez dans la figure 56, & encore mieux dans la 57 *fig.* que nous avons représentée en plus grand volume, pour vous faire mieux distinguer les côtés qu'il faut joindre, dont ceux qui sont marqués par des lignes noires, sont ceux qui paroissent à l'œil, &

Pl. 15, fig. 57.

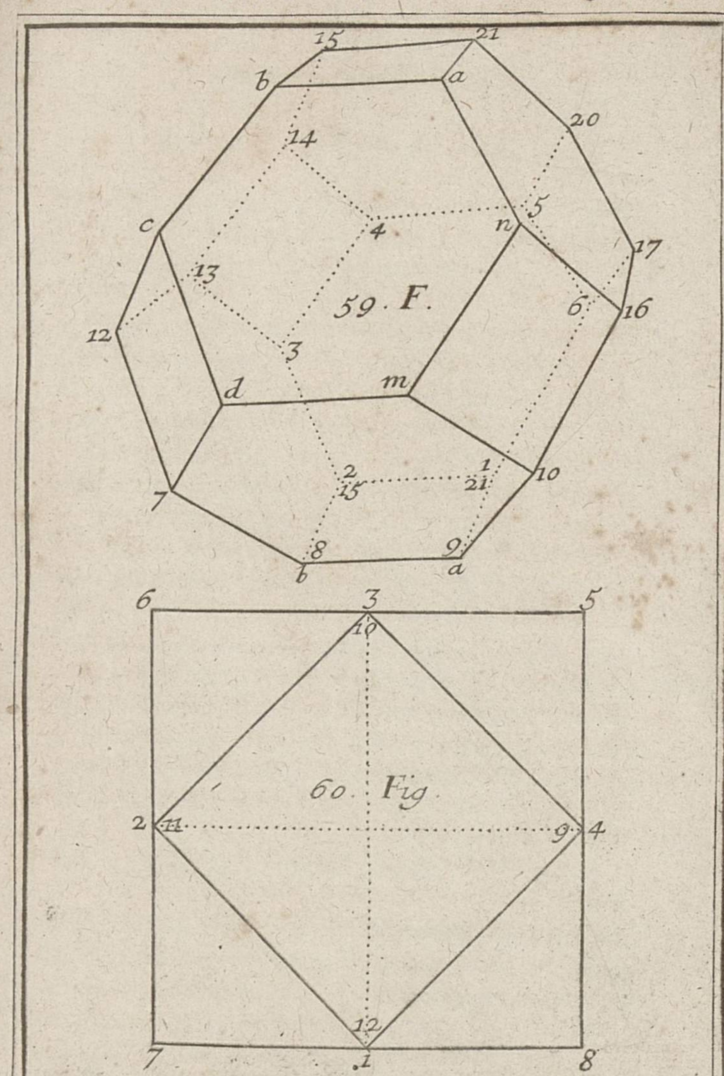
les autres qui sont marqués par des lignes ponctuées, sont ceux qu'on ne voit pas.

Secondement, si l'on veut que le corps s'appuye sur l'une de ses six surfaces quarrées, comme sur le quarré *a b*, 15 21, le plan, ou l'assiette de ce polyedre changera, & elle sera telle que vous la voyez dans la figure 58, qu'il ne faut que regarder pour la comprendre, pour le moins, quand on sçaura que le grand côté de l'octogone irrégulier, comme *d* 12 est égal à la diagonale *a* 15, ou *b* 21 du quarré intérieur qui sert de base au polyedre.

Pl. 15. fig. 58.

Le profil change aussi, car la hauteur des points 3, 7, 10, 6, est égale à la moitié *cd* du grand côté *d* 12 de l'octogone irrégulier, la hauteur des points 4, 5, 17, 16, *m*, *d*, est égale au côté entier *d* 12, la hauteur des points 14, 20, *n*, *c*, est égale au même côté *d* 12, & à sa moitié *cd*; enfin la hauteur des points *a*, *b*, 15 21, est double du même côté *d* 12, dont le quarré est au quarré du rayon de l'octogone irrégulier, comme 4 est à 5; ce qui fait que si le rayon est de 100000 parties égales, le grand côté *d* 12 en contient 89442, & soutient un arc de 53, 8', & que le petit côté *dm* en comprend 63245, & soutient un arc de 36, 56'. Par le moyen de ce plan & de ce profil, nous avons mis le polyedre en perspective, comme vous voyez dans la 59 *fig.*

Pl. 16. fig. 59.


15
21
b
a
20
14
5
c
4
n
17
13
59 . F.
6
16
12
3
d
m
2
1
10
15
21
7
8
9
b
a
6
3
5
10
60 . Fig
2
11
9
4
12
7
1
8



PROBLEME VIII.

Représenter en perspective un polyedre équilatéral, terminé par six quarrés égaux, & par huit triangles équilatéraux, & égaux entre eux.

SI vous voulez que le polyedre s'appuie sur l'un de ses six quarrés égaux, comme 9, 10, 11, 12, il n'y aura qu'à lui circonscrire un autre quarré, & le plan sera achevé, dont le profil est tel. Pl. 16. fig. 60.

La hauteur des points 5, 6, 7, 8, est égale à la moitié 3, 5, du côté 6, 5, du quarré circonscrit, & la hauteur des points 1, 2, 3, 4, est égale au côté entier 6, 5, ou à la diagonale 11, 9, ou 10, 12, du quarré inscrit, qui sert de base au polyedre.

Par le moyen de ce plan & de ce profil, nous avons mis ce polyedre en perspective, comme vous voyez dans la 61 *fig.* qui vous fait voir distinctement les côtés qu'il faut joindre, quand on a trouvé dans le tableau l'apparence des points qui bornent leurs extrêmités. Pl. 17. fig. 61.

PROBLEME IX.

Représenter en perspective un polyedre équilatéral, terminé par six quarrés égaux, & par douze triangles isosceles & égaux entre eux, dont la hauteur est égale à la base.

PRemierement, si vous voulez que le polyedre s'appuie sur l'un de ses six quarrés égaux, comme 3, 6, 9, 12, son assiette sera telle que vous la voyez dans la figure, où les demi-cercles Pl. 17. fig. 62.

qui ſont décrits des quatre angles droits de la baſe 3, 6, 9, 12, des milieux A, B, des deux côtés oppoſés 5, 2, & 12, 9, font aſſez connoître la deſcription de ce plan, ſans qu'il ſoit beſoin d'en parler davantage.

Pour le profil, nous dirons que la hauteur des points 4, 11, 7, 8, 1, 14, eſt égale à la touchante 7, 15, & que la hauteur des points 5, 6, 13, 12, eſt double de la précédente, c'eſt-à-dire, double de la même touchante 7, 15. Après quoi il n'y a plus qu'à regarder la 63 *fig.* pour comprendre la maniere de repréſenter ce polyedre en perſpective, que je vous repréſente encore tout ombré, & vu d'une autre façon, dans la 64 *fig.*

Pl, 18, fig. 63.

Secondement, ſi vous voulez que le polyedre ſoit élevé droit ſur l'un de ſes angles ſolides, comme 1, auquel cas ſon aſſiette ſera le ſimple exagone régulier, 2, 3, 4, 5, 6, 7, dont le centre ſera le point 1, & le profil ſera tel.

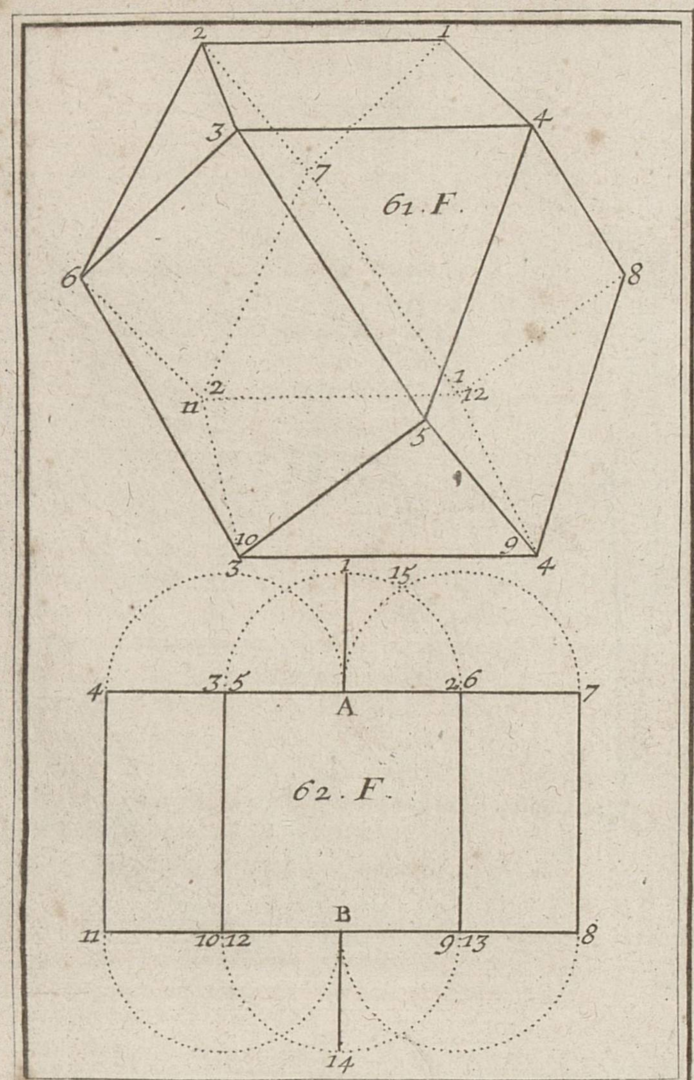
Pl. 19. fig. 64.

Fig. 65.

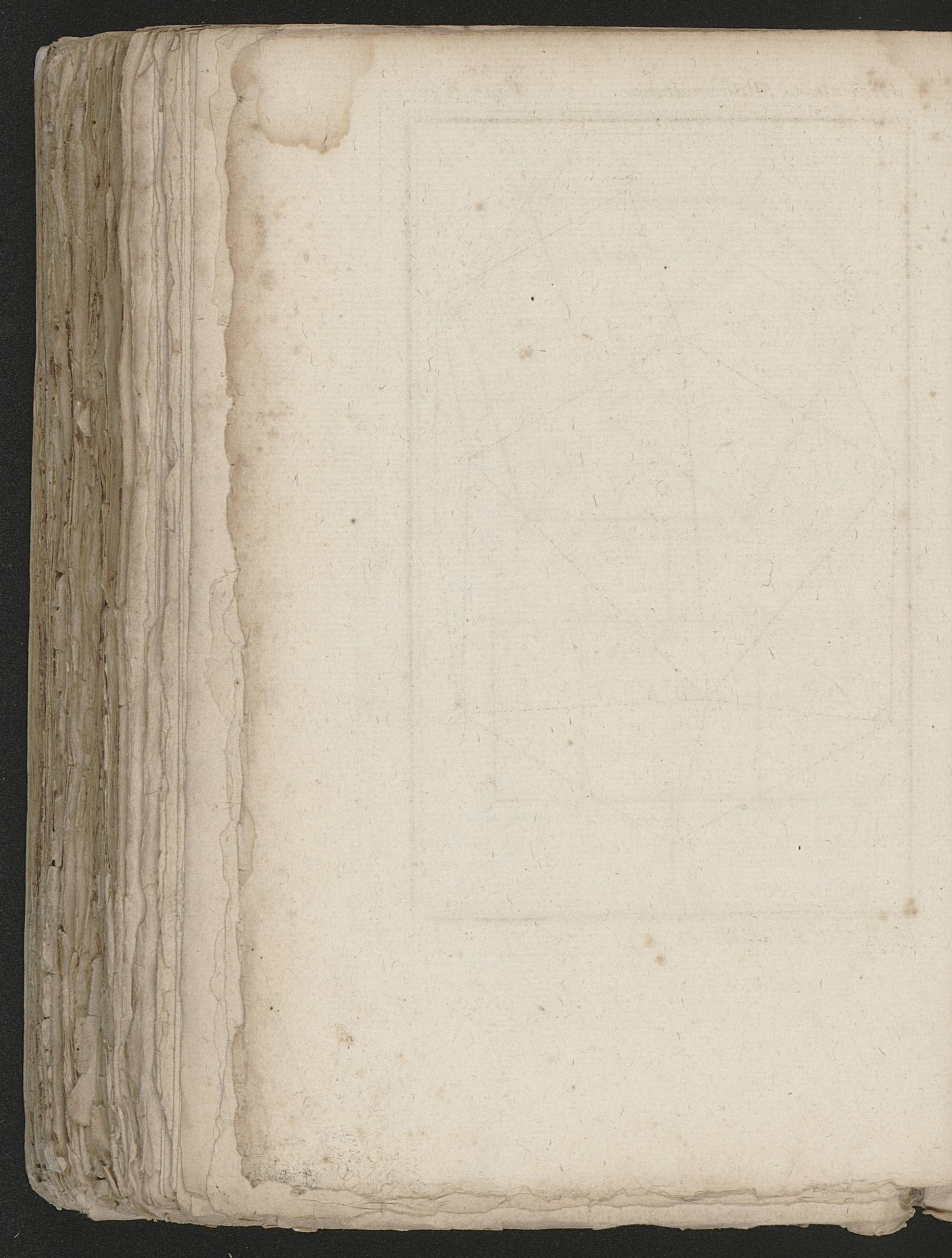
La hauteur des points 8, 9, 10, 11, 12, 13, eſt égale à la moitié du côté de l'exagone: la hauteur des points 2, 3, 4, 5, 6, 7, eſt égale au triple de la précédente, c'eſt-à-dire, à trois moitiés du côté de l'exagone: & la hauteur du point 1 eſt double du côté de l'exagone, ou égal au diametre 4, 7.

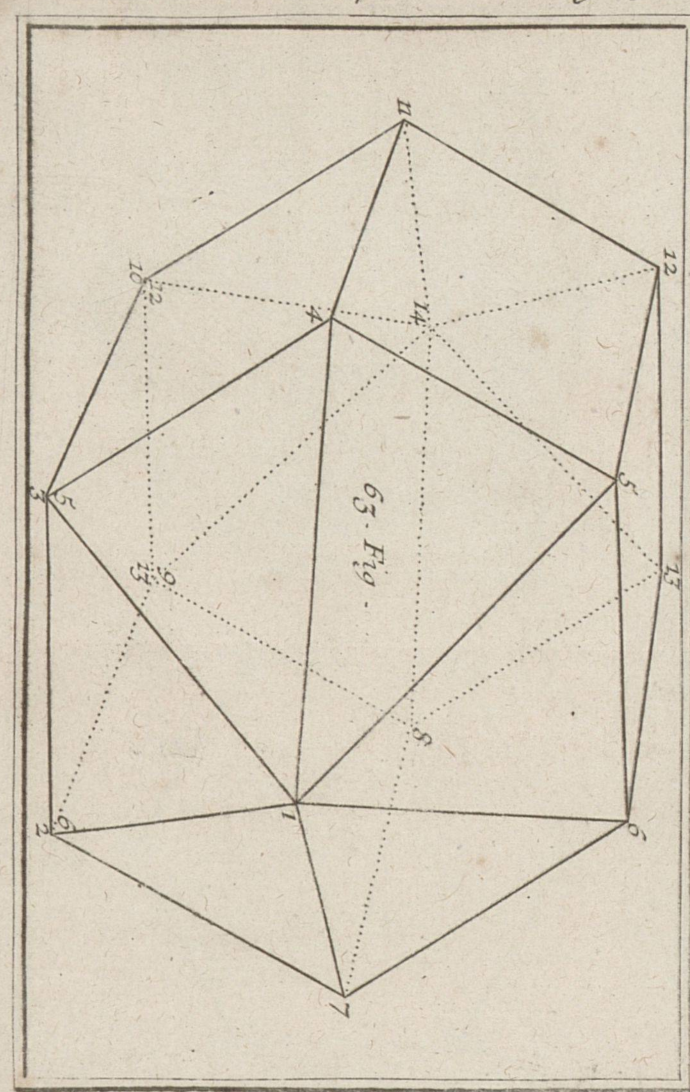
Je n'enſeignerai pas ici la maniere de repréſenter en perſpective ce polyedre ſelon ſon plan & ſon profil, parce que nous en avons ſuffiſamment parlé dans notre *traité de perſpective*; c'eſt pourquoi je me contenterai de vous en donner ſimplement ici la figure.

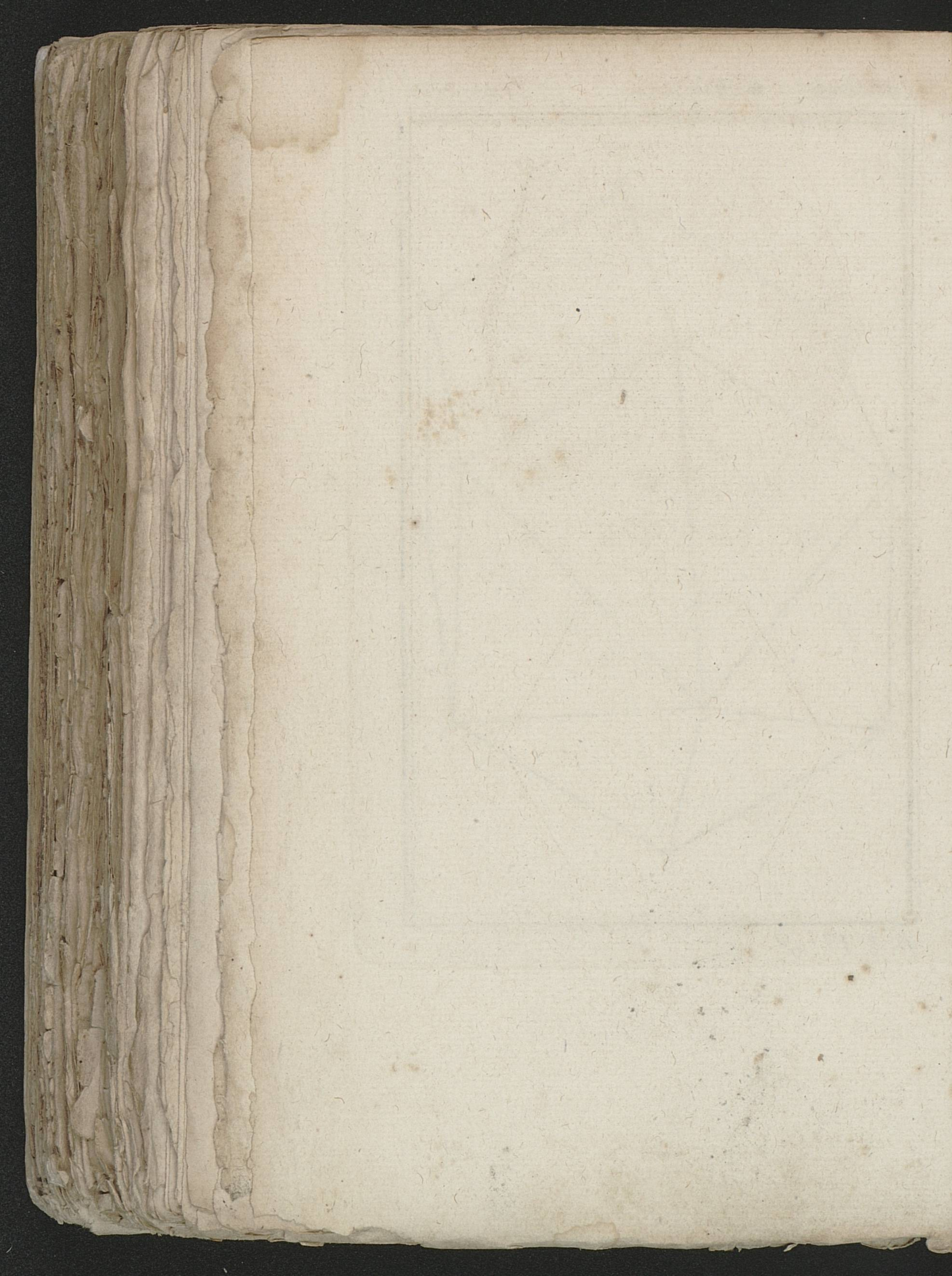
Pl. 20. fig. 66.

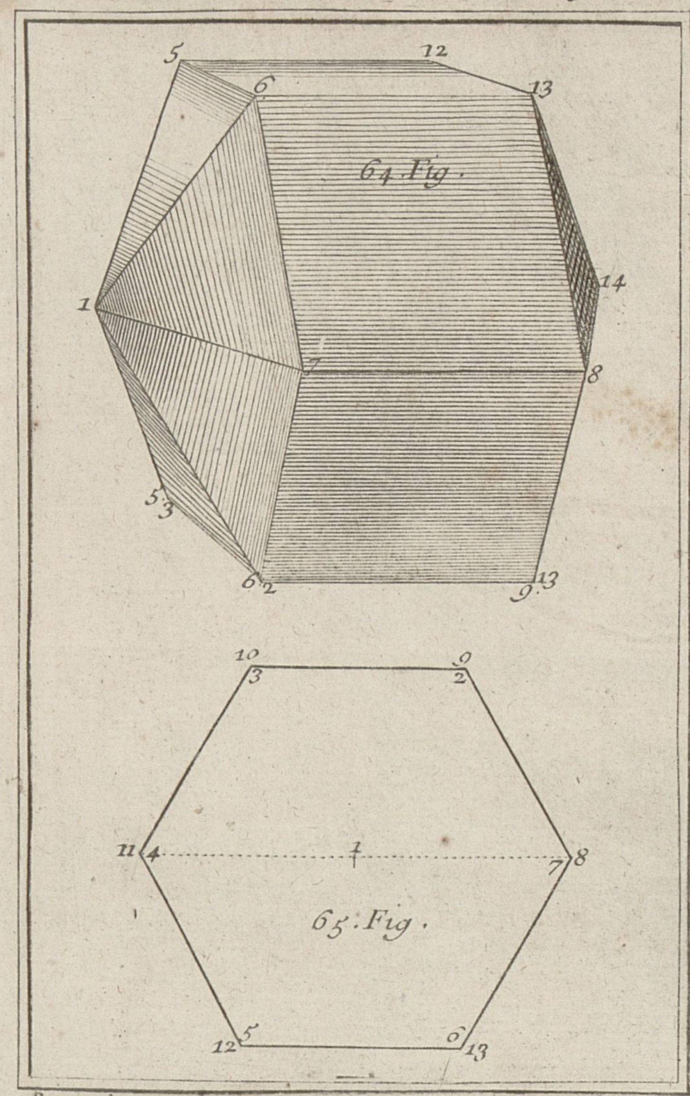


Bergy fecit To . I . Pl . 17




11
12
10
12
4
14
3
5
5
5
63. Fig.
13
9
13
8
2
6
1
6
7

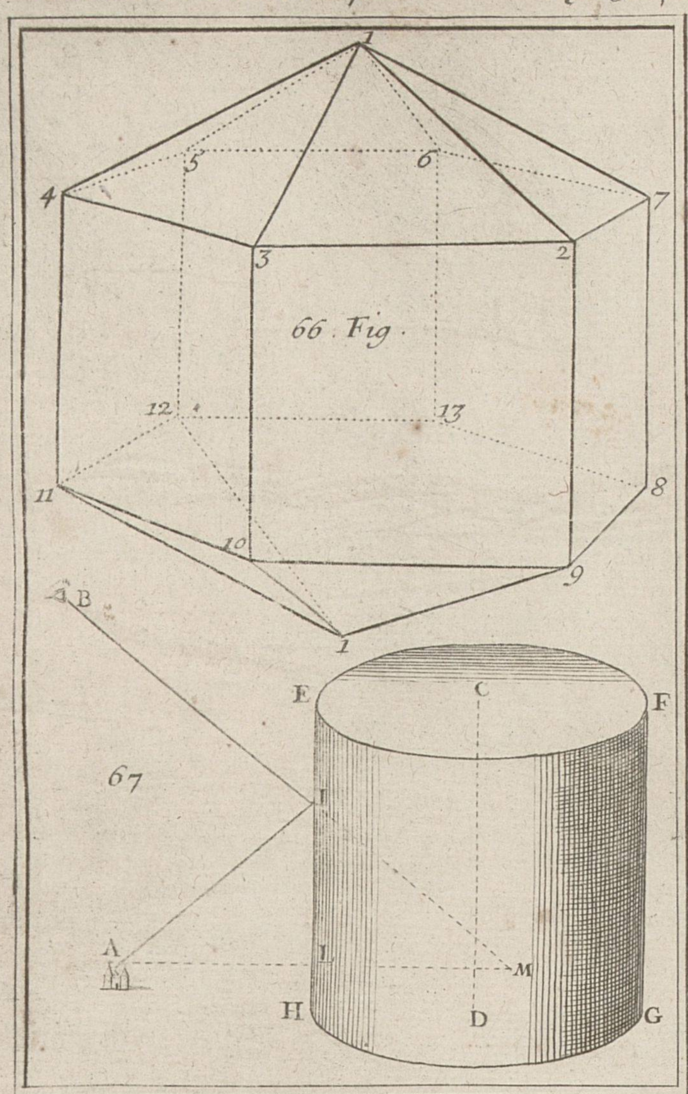




Berey fecit To. I. Pl. 19

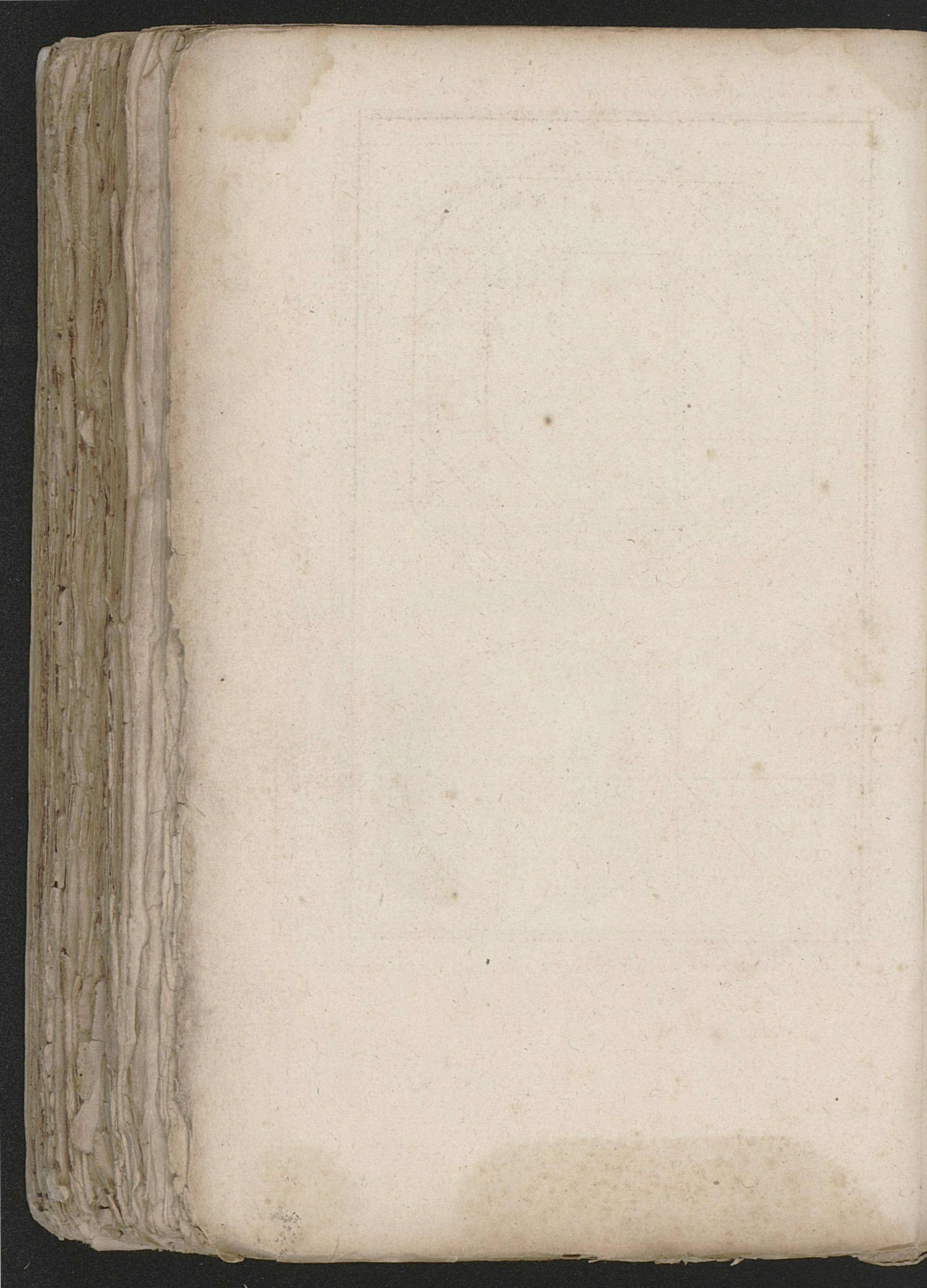
N°.

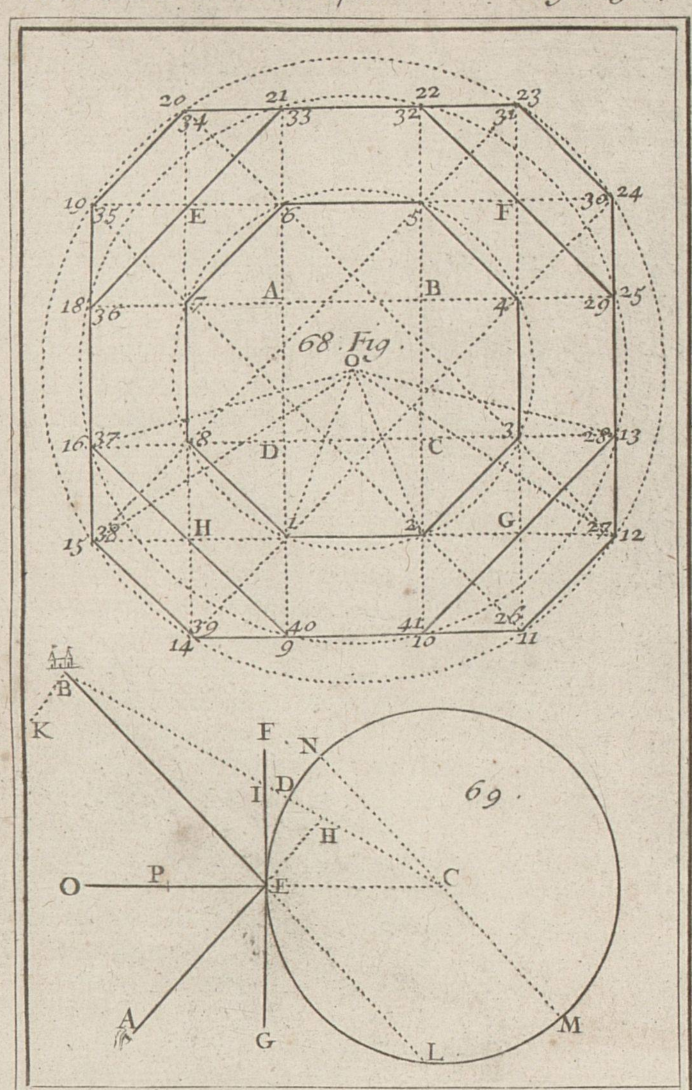




6.

To. I. Pl. 20.





Berey fecit — To. I. Pl. 21.



PROBLEME X.

Représenter en perspective un polyèdre équilatéral, terminé par douze quarrés égaux, par huit exagones réguliers & égaux, & par six octogones réguliers & égaux.

SI vous voulez que la base de ce corps soit l'un de ses six octogones comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dont le centre est O, joignez les extrêmités de deux côtés opposés & paralleles par des lignes droites paralleles entre elles, qui par leurs mutuelles intersections, formeront un quarré, comme ABCD. Prolongez les deux côtés opposés & paralleles, 1, 2, 5, & 6, & pareillement les deux côtés opposés & paralleles 3, 4, 7 & 8, qui, en rencontrant les deux premiers, formeront un autre quarré plus grand EFGH. Après quoi il sera facile d'achever le plan; sçavoir, en faisant la ligne E 20, égale à la partie E 7, &c.

Pl. 21. fig. 68.

Pour une description plus exacte de ce plan, on considérera qu'en supposant le rayon O1, ou O2, de 1000 parties égales, le rayon O13, ou O16, du cercle moyen, comprend 1514 de ces parties, & que le rayon O12, ou O15 du plus grand cercle en contient 1731. Que le plus petit côté soutient dans le plus grand cercle un arc 11, 12, ou 14, 15, de 25 degrés 32'; dans le moyen un arc 1, 2, de 29 degrés 16'; & dans le plus petit un arc 12, de 45 degrés. Et que le plus grand côté soutient dans le plus grand cercle un arc 14, 11, de 64 degrés 28'; & dans le cercle moyen un arc 10, 13, ou 9, 16, de 60 degrés 44', dont la corde est double du plus petit côté 9, 10.

Pour le profil, on donnera toute la ligne 15, 12, à la hauteur des points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dont l'assiette est l'octogone intérieur, ou le plus petit octogone régulier 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. On donnera la partie 15 G, à la hauteur des points 9, 10, 13, 25, 22, 21, 18, 16, dont l'assiette est l'octogone moyen. On donnera la partie 15, 2, à la hauteur des points 14, 11, 12, 24, 23, 20, 19, 15, dont l'assiette est le plus grand octogone. On donnera la partie 15, 1, à la hauteur des points 26, 27, 30, 31, 34, 35, 38, 39, dont l'assiette est le plus grand octogone. Enfin l'on donnera la partie 15, H, à la hauteur des points 40, 41, 28, 29, 32, 33, 36, 37, dont l'assiette est l'octogone moyen.

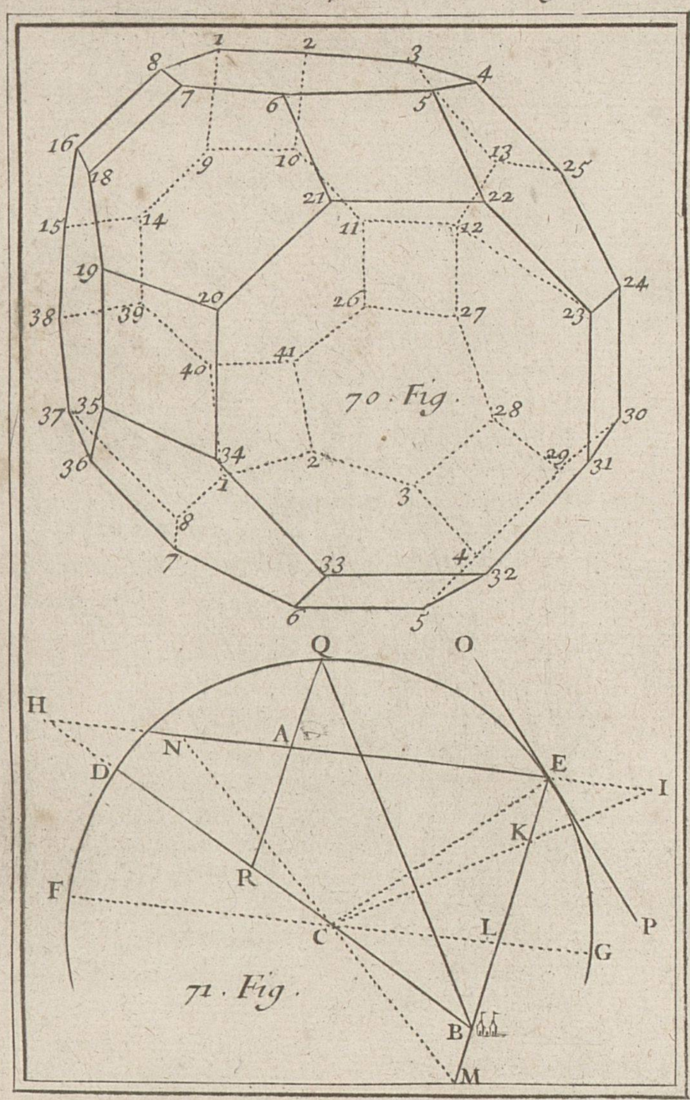
La hauteur 15, 12, se trouvera de 2930 parties, dont le rayon O1 du plus petit octogone en contient 1000. La hauteur 15, G, est de 2389 semblables parties : la hauteur 15, 2, en contient 1848 : la hauteur 15, 1, comprend 1082 : enfin la hauteur 15 H, en contient 541.

Pl. 22. fig. 70.

Quand on aura mis en perspective le plan de ce polyedre terminé par 26 faces, & qu'on aura déterminé la position de ses angles solides suivant leurs hauteurs différentes, que le profil précédent vous donne, on joindra ces angles solides par des lignes droites, qui seront les côtés égaux du polyedre, comme vous voyez dans la figure, qu'il suffit de regarder pour la comprendre.

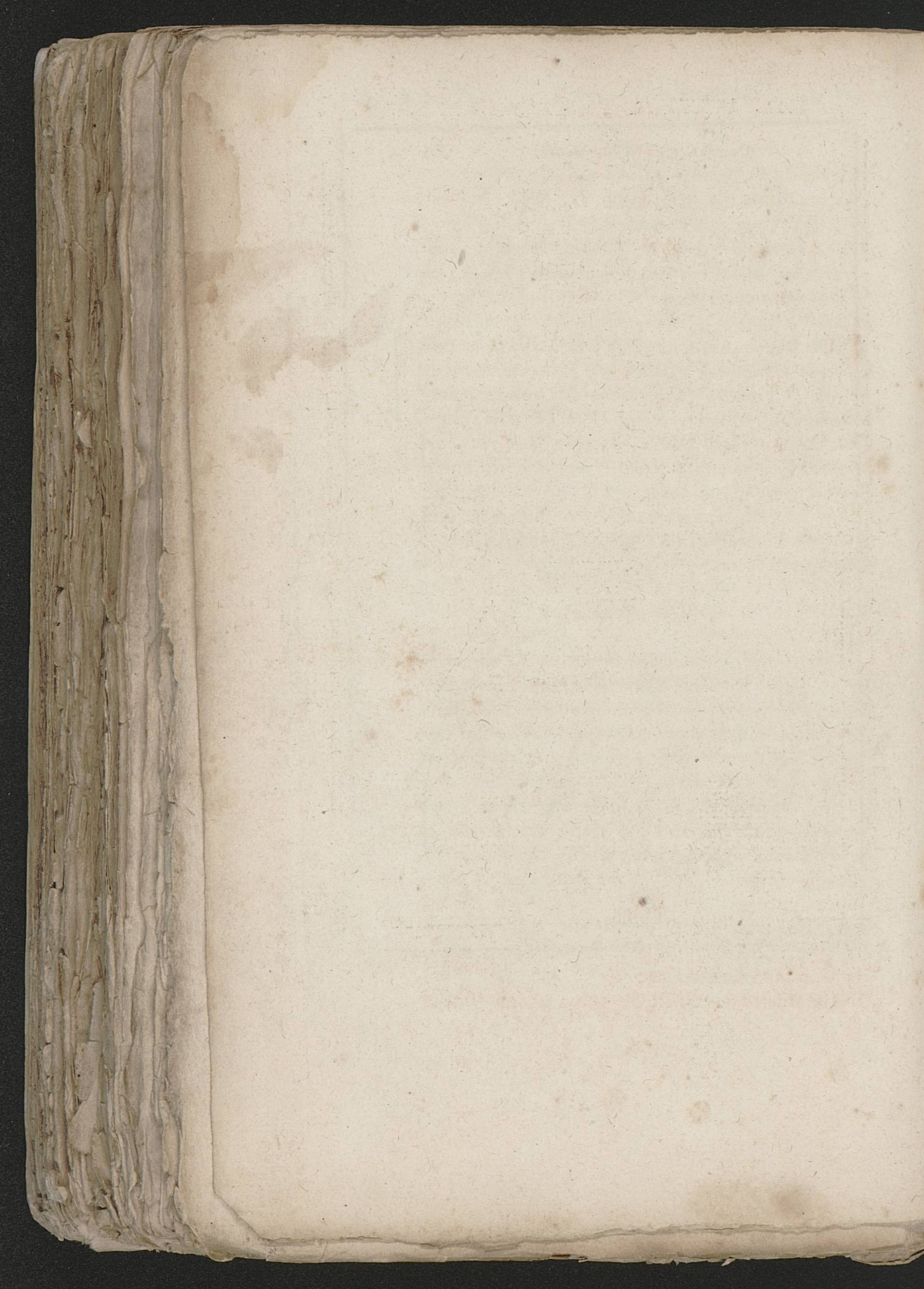
Des miroirs plats.

Ce qu'on va dire des miroirs plats, doit s'entendre des miroirs de glaces, quoiqu'on puisse en appliquer une grande partie à ceux de fonte, d'acier, &c.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
Q
O
H
A
N
D
E
I
K
R
F
C
L
G
P
B
M

70. Fig.

71. Fig.



PROBLEME XI.

Un point de quelque objet & le lieu de l'œil, étant donnés, trouver le point de réflexion sur la surface d'un miroir plat.

Pl. 11, fig 51.

SOit B un point de l'objet, A l'œil, & le miroir représenté par la ligne CD. Du point B menez à CD la perpendiculaire BD que vous prolongerez jusqu'en F, en sorte que DF soit égale à DB. Par les points F & A, tirez la ligne AF, qui coupera CD en E. Ce point E sera le point de réflexion cherché : de sorte que si l'on tire les deux lignes AE, BE, l'angle de réflexion AEC sera égal à l'angle d'incidence BED, comme il est aisé de le démontrer.

REMARQUE.

Dans notre *dictionnaire de mathématique* on trouve ce problême appliqué à un miroir sphérique : mais il se peut aisément appliquer au jeu de billard. Supposons que la ligne CD représente un bord du billard, & qu'aux deux points A, B, du tapis ou table du même billard, il y ait deux billes, dont l'une, comme A, ne peut être envoyée directement contre l'autre B, à cause du fer qui est entre deux. On trouvera le point E, comme il vient d'être enseigné, & ce point E sera celui où le joueur envoyera la bille A, afin que par une bricole elle puisse toucher l'autre bille qui sera en B. Mais dans la pratique, cela se peut exécuter plus facilement en cette sorte.

On trouvera, dis-je, le point E, en prolon-

geant par la pensée la perpendiculaire BD jusqu'en F, en sorte que la ligne DF soit égale à cette perpendiculaire BD, & en ayant mis en F une marque visible, le joueur poussera sa bille A, selon la ligne AF. Alors cette bille A, rencontrant le bord du billard en E, se réfléchira, & ira rencontrer la bille B; mais on doit observer de pousser fortement la bille A, pour surmonter les défauts du billard.

Comme dans ce jeu il n'est pas toujours facile, ni même permis de mettre une marque visible en F, parce que l'adversaire a la liberté de l'ôter, il faut que le joueur vise du point F la bille A, & qu'il remarque par le rayon visuel FA, le point E sur le bord du billard, où il doit envoyer sa bille pour la faire réfléchir en B.

Pl. 11. fig. 52.

Si vous voulez trouver le point E de réflexion, pour faire que la bille A rencontre la bille B par deux bricolles, tirez du point A, la ligne AC, parallele à la ligne DG, & du point B, la ligne BG parallele à la ligne CD. Cherchez à la somme des deux lignes paralleles AC, GD, à la ligne AC, & à la somme des deux lignes paralleles CD, BG, une quatrieme proportionnelle, dont la longueur étant portée en CE, donnera le point E qu'on cherche.

PROBLEME XII.

Tirer par derriere l'épaule un pistolet aussi justement que si on le couchoit en joue.

Pl. 13. fig. 53.

SOit AB une ligne qui représente le miroir, & CD la perpendiculaire menée à ce miroir de C, but où l'on veut tirer. Soit encore D l'image ou apparence de ce but, qui paroîtra sur cette per-

pendiculaire aussi éloignée au-delà du miroir, que le but C l'est en deçà. Soit enfin l'œil placé en E, qui regarde le but en D par la ligne de réflexion EFD. Le rayon d'incidence sera la ligne CF, selon laquelle il faut placer le pistolet GH derriere l'épaule, & le tourner de maniere que son apparence IK convienne avec la ligne de réflexion EFD, & soit dirigée vers l'apparence D du but C. Le pistolet GH ainsi tourné regardera directement le but C & ne manquera point de le frapper, si on lâche le coup.

PROBLEME XIII.

Les points de l'œil & de quelque objet, avec le point de réflexion sur la surface d'un miroir plan, étant donnés, déterminer le lieu où l'on doit voir l'image de l'objet proposé.

SI l'œil est A, l'objet B, & E le point de réflexion sur la surface CD d'un miroir plan, tirez de l'objet B, la ligne indéfinie BF, perpendiculaire à cette surface, & prolongez le rayon de réflexion AE, jusqu'à ce qu'il rencontre cette perpendiculaire en un point, comme F; ou bien faites DF égal à DB. Le point F sera le lieu de l'image de l'objet B, c'est-à-dire, le point où l'objet B sera vu par l'œil A, dans le miroir plan CD: car l'optique apprend que l'image d'un objet se fait au concours du rayon de réflexion & d'une ligne droite tirée de l'objet perpendiculairement à la surface du miroir, soit que cette surface soit plane, soit qu'elle soit sphérique.

Pl. 11. fig. 51.

D'où il est aisé de conclure, par l'égalité des angles de réflexion & d'incidence, que quand le

Pl. 11. fig. 51.

miroir est plan, comme nous le supposons ici, l'objet doit être vu aussi enfoncé dans le miroir, qu'il en est éloigné; & c'est à cause de cela que nous avons fait la ligne DF égale à la perpendiculaire DB.

Il s'ensuit aussi que la distance AF de l'image E est égale au rayon d'incidence BE & au rayon de réflexion AE, parce que le rayon d'incidence BE est égal à la ligne EF, à cause de l'égalité des deux triangles rectangles EDB, EDF.

Il s'ensuit encore que si l'œil A s'approche ou s'éloigne dans le même rayon de réflexion AE du point de réflexion E d'une certaine quantité, l'image F de l'objet B sera approchée ou éloignée de l'œil A de la même quantité; parce que la distance EF demeurant toujours la même, la distance AF croîtra ou décroîtra comme la distance AE.

Il s'ensuit de plus que quand le miroir plan est parallele à l'horison, comme CD, une grandeur perpendiculaire à l'horison, comme BD, doit paroître renversée; & que quand le miroir plan est perpendiculaire à l'horison, la main droite d'une personne lui doit paroître à la gauche de son image, & la gauche à la droite.

Enfin il s'ensuit que la distance de l'œil à l'image de quelque objet vu dans le dernier miroir par plusieurs réflexions, à l'aide de plusieurs miroirs plans, est égale à la somme de tous les rayons d'incidence & de réflexion, & qu'un objet se peut quelquefois multiplier dans un miroir plan, lorsqu'il est de verre.

C'est ainsi que l'on voit quelquefois qu'un flambeau allumé paroît double dans un miroir plan de verre un peu épais, à cause de la double réflexion qui s'y fait, l'une sur la surface extérieure du mi-

roir, & l'autre sur le fond du même miroir. Car la lumiere ne se réfléchissant pas toute sur la surface extérieure du miroir, elle pénetre la glace, & va rencontrer cette feuille d'étain qu'on met derriere, pour empêcher les rayons de passer outre, où elle se réfléchit une seconde fois. L'œil se rencontrant dans le concours des deux rayons de réflexion, qui ne peuvent être paralleles, il ne faut pas s'étonner si on voit l'objet double, ou en deux endroits différens du miroir. Il est évident que la diverse irrégularité du verre, produisant diverses réflexions, peut multiplier davantage l'objet, surtout lorsqu'il sera vu un peu de côté.

PROBLEME XIV.

Se représenter dans un miroir comme volant.

IL faut placer une grande glace, de sorte qu'elle fasse un angle demi-droit avec l'horison, ou le plancher d'une chambre. Si on avance vers le miroir ainsi incliné, & qu'on étende les bras en les agitant, comme les oiseaux font leur ailes, le corps paroîtra horisontal à la terre, & il semblera voler en l'air : mais il faut porter toute son attention vers sa tête, afin de ne point jetter les yeux sur le pavé, qui est aussi élevé que les pieds.

PROBLEME XV.

Disposer plusieurs miroirs de maniere qu'on se voye dans chacun en même tems.

ON disposera ces miroirs à la circonférence d'un cercle, de telle sorte qu'ils conviennent avec les cordes de ce cercle. Pour se voir dans

chacun de ces miroirs, il faut ſe placer au centre du cercle.

REMARQUE.

C'eſt par le moyen de ce problême qu'on peut faire voir pluſieurs jets d'eau dans une chambre optique, quoiqu'il n'y en ait qu'un.

PROBLEME XVI.

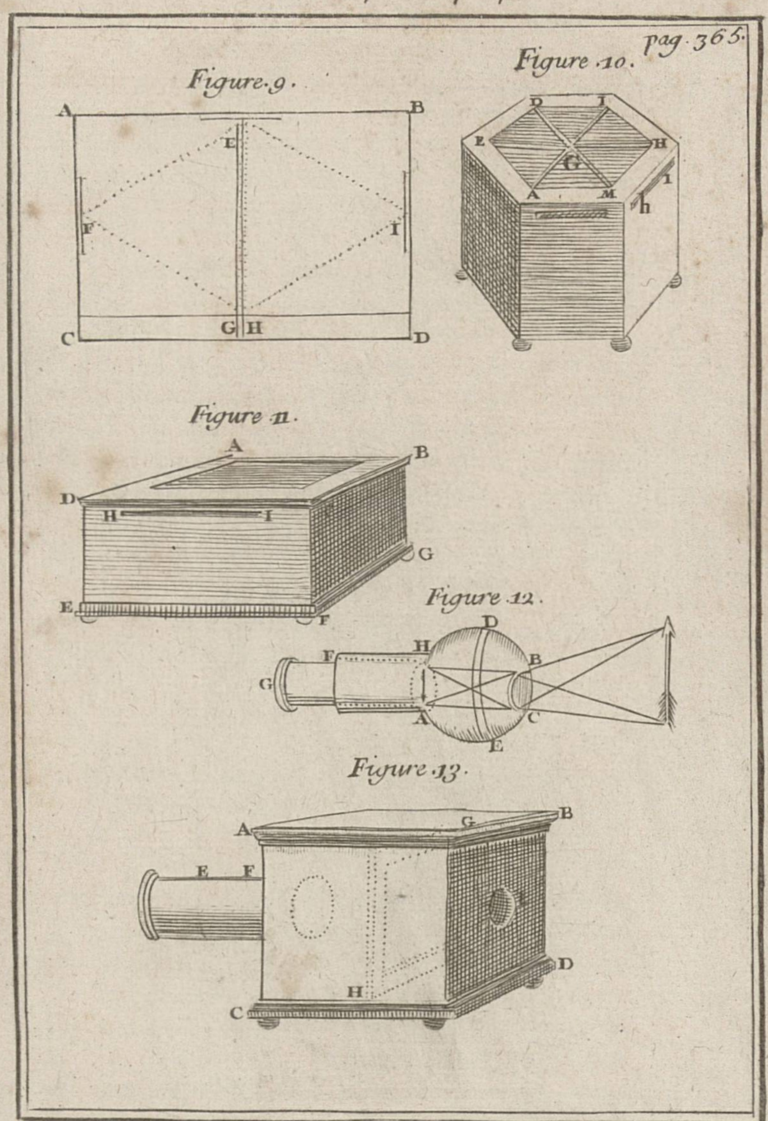
Un mari jaloux étant dans une chambre, lui faire voir ce que fait ſa femme dans une autre chambre, l'un & l'autre étant près de la muraille qui ſépare les deux chambres.

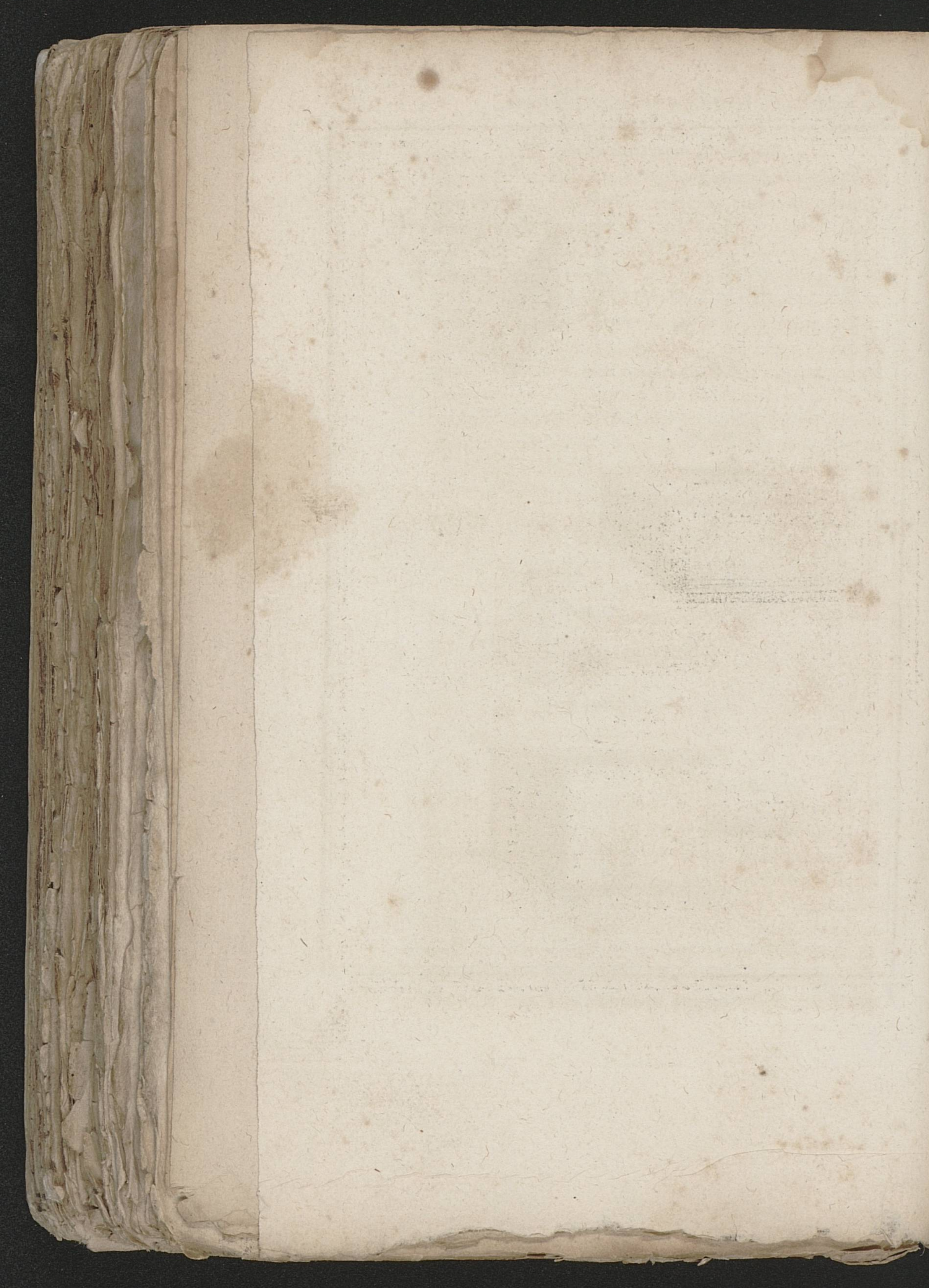
pl. 23. fig. 9.

QUe la figure ABCD repréſente les deux chambres où ſe trouvent le mari & la femme : que EH ſoit la muraille qui ſépare ces deux chambres : que le mari ſoit en G, & la femme en H.

Il faut laiſſer entre la muraille de ſéparation & le plancher une ouverture où l'on puiſſe placer horiſontalement un miroir comme E. Il faut encore en mettre deux autres F & I aux deux murailles AC, BD, de maniere que les rayons qui partiront du point H, ayant frappé quelque point du miroir I, aillent frapper le miroir E; d'où s'étant réfléchis, ils tomberont ſur le miroir F, & de-là ſe réfléchiront en G, où nous avons ſuppoſé que le mari s'étoit poſté : il ſera témoin de toutes les actions de ſa femme. Il eſt vrai que s'il ne veut pas être apperçu, il ne doit point avoir de lumiere, ou bien il doit fermer les volets des fenêtres de la chambre où il eſt, ſi c'eſt pendant le jour qu'il veut ſatisfaire ſa jalouſie. Les glaces dont on ſe

Recreations Mathematiques Optique





ſert à préſent pour orner les ſallons, ſont très-commodes pour ce ſujet. La lumiere ayant été obligée de ſe détourner à la rencontre des trois miroirs, s'affoiblira quelque peu.

REMARQUE.

On pourroit par ce moyen, étant dans une chambre, voir tout ce qui ſe paſſeroit dans la rue, ſi on mettoit le miroir ſur la tablette de la fenêtre, & qu'on le diſpoſât de maniere que les rayons des objets qui viendroient frapper le miroir, puſſent ſe réfléchir dans la chambre. Mais pour n'être point vu, il faudroit fermer les volets des fenêtres, & ne laiſſer d'eſpace qu'autant qu'il ſeroit néceſſaire pour laiſſer paſſer les rayons des objets qu'on voudroit voir. Si on laiſſoit le miroir dans la même diſpoſition pendant la nuit, & que la chambre fût fort éclairée, on pourroit voir de la rue tout ce qui s'y paſſeroit.

PROBLEME XVII.

Faire paroître dans un miroir un autre objet que celui qui ſemble devoir y être repréſenté.

I.

PLacez une glace de miroir plus élevée que la hauteur d'un homme, en l'inclinant tant ſoit peu à l'horiſon, s'il eſt néceſſaire : mettez quelque objet vis-à-vis de ce miroir, de maniere qu'il ſemble que les rayons de cet objet ayant frappé le miroir, duſſent être renvoyés à l'œil. Au deſſus du premier objet placez un autre objet, qui ſera caché par quelque artifice, dont les rayons pourtant ayant frappé le miroir, ſeront réfléchis

vers les yeux des ſpectateurs. Alors le miroir repréſentera autre choſe que ce qu'il paroît devoir repréſenter. Si on a placé devant le miroir un cercle, il repréſentera un quarré. Ayant mis la ſtatue d'un homme, on verra un lion, ou quelque autre animal; ou bien ayant placé une pendule qui marque une certaine heure, elle paroîtra marquer dans le miroir une heure toute contraire.

II.

On placera une grande glace, qui ira aſſez près du plancher, auquel on fera une ouverture entre des ſolives, avec aſſez d'artifice pour que ceux qui ſont dans la chambre ne s'en apperçoivent point. On mettra quelque image fort éclairée dans la chambre au-deſſus, de maniere qu'elle puiſſe être vue dans le miroir par ceux qui y regarderont. On ſera fort étonné de voir ces objets qui ne paroiſſent point dans la chambre.

Au lieu de mettre l'image dans une chambre au deſſus du miroir, on peut la mettre dans une chambre à côté, en ménageant adroitement une ouverture dans la muraille de ſéparation.

REMARQUE.

C'eſt-là le fondement de ces curioſités d'optique, qui donnent tant d'admiration aux ſpectateurs. Lorſqu'on eſt dans une chambre entierement obſcure, & qu'on regarde vers un côté où ſont placées des glaces, dont on ne s'eſt point apperçu auparavant, à cauſe d'un rideau qui étoit au devant, on voit avec étonnement le ciel repréſenté avec les étoiles, le ſoleil levant, des mers ou des lacs, des vaiſſeaux, des tours, des montagnes, des villes, des

canons, dont on apperçoit la lumiere, lorſqu'ils tirent pour rendre le ſalut aux vaiſſeaux qui paſſent. On y voit enfin tout ce qu'une adreſſe ingénieuſe peut inventer pour donner un plaiſir qui eſt d'autant plus grand, que l'on ne ſçait point d'où viennent tous ces objets : l'eſprit inquiet croit que c'eſt quelque enchantement, quoique ce ſpectacle agréable ne vienne que du lieu qui eſt au-deſſus des ſpectateurs.

PROBLEME XVIII.

Faire une boîte où l'on voye des objets tous différens de ceux que l'on avoit vu en regardant par une autre ouverture, quoique les uns & les autres paroiſſent occuper toute la boîte.

Pl. 23, fig. 10.

IL faut faire une boîte qui ait pluſieurs côtés, comme celle-ci AEDIHM, qui en a ſix. On ſéparera le dedans de la boîte en pluſieurs cellules par des ais qui iront de chaque angle A, E, D, &c. au centre de la boîte G. Il y aura autant de ſéparations que de côtés, on appliquera à chacun de ces ais des miroirs plats; on fera à chaque côté de la boîte des ouvertures comme *h* 1, pour regarder dans les ſéparations; on mettra à ces ouvertures des morceaux de verre, dont la face qui ſera au dedans de la boîte, ne doit point être polie, mais un peu uſée, afin qu'on ne puiſſe pas voir ce qui eſt dans les cellules. On mettra dans ces cellules ou ſéparations les objets qu'on voudra : enfin on couvrira le deſſus de cette boîte d'un parchemin fort mince, pour donner paſſage à la lumiere.

Quand on regardera par une ouverture, on verra les objets de cette cellule repréſentés dans les miroirs, & l'on croira qu'ils occupent toute la

boîte ; mais en regardant par une autre ouverture on y verra d'autres objets qui paroîtront encore occuper toute la boîte, & ainsi des autres.

REMARQUE.

Pour rendre plus transparent le parchemin qu'on met sur les machines d'optique, il faut le laver plusieurs fois dans une lessive claire, que l'on changera à chaque fois : on le lavera pour la derniere fois dans de l'eau de fontaine. Enfin on le mettra sécher à l'air en le tenant étendu avec des cloux, ou avec des morceaux de bois.

Si on veut donner de la couleur à ce parchemin, on se servira pour le verd, de verd de gris délayé dans du vinaigre, avec un peu de verd foncé; pour le rouge, de l'infusion de bois de bresil; pour le bleu, du suc de jeunes myrthes; pour le jaune, de l'infusion faite avec des bayes de nerprun cueillies au mois d'août. On passera de tems en tems un vernis sur le parchemin.

PROBLEME XIX.

Faire une machine d'optique, où il paroîtra une galerie, ou une allée d'arbres, &c, continuée à l'infini.

CEtte boîte au lieu d'être poligone, comme celle qu'on vient de décrire, sera quarrée; on lui donnera environ un pied & demi de face, plus ou moins, selon qu'on jugera à propos. On appliquera sur chaque face perpendiculaire intérieure, des glaces : on fera au milieu d'une des faces une ouverture ronde d'environ un pouce de diametre,

metre, & à cet endroit on ôtera l'étain qui est sur la glace, afin qu'on puisse regarder dans la boîte : sur le fond intérieur, on mettra tels objets qu'on voudra, comme une gallerie, une allée d'arbres, &c. accompagnées de bâtimens superbes, de jardins, de campagnes, de bois & autres ornemens qu'on imaginera : enfin on couvrira cette boîte d'un parchemin semblable à celui dont on a parlé dans le problême précédent. En regardant par l'ouverture du milieu d'une des faces, il semblera que les objets mis au fond de la boîte, seront continués à l'infini. Si c'est une gallerie, par exemple, composée de colonnes, on la verra très-longue, & allant toujours en diminuant; ce qui fait un très-bel effet.

REMARQUE.

A l'imitation de ces machines d'optique, on pourroit construire des cabinets revétus de glaces, dont l'effet rempliroit le spectateur d'admiration. On a des glaces assez grandes pour faire ces sortes de cabinets. Ce seroit un ouvrage superbe, & qui mériteroit l'attention des curieux. Il faudroit au dessus de ces glaces laisser des ouvertures qu'on fermeroit de quarreaux de verre, pour donner du jour dans ces cabinets.

Après les problêmes qu'on vient de proposer, il ne sera point difficile d'imaginer des machines d'optique, qui seront composées de celles qu'on a décrites, & qui seront très-curieuses, à cause des différens objets vus de diverses manieres, qui surprendront lorsqu'on les regardera.

Observations diverses sur les miroirs plats.

I.

Dans un miroir plat, ce qui est à droite paroît à gauche, & ce qui est à gauche paroît à droite, & lorsqu'on l'éleve au dessus de la tête, les pieds & le pavé paroissent en haut, tandis que la tête paroît en bas.

II.

Si on se regarde la tête dans un miroir depuis le menton jusqu'au front, l'espace qui comprend cette grandeur prise sur le miroir, n'est que la moitié de cette grandeur même, c'est à dire, de la tête. La même chose arrivera à l'égard de tous les objets qui seront aussi éloignés du miroir que l'œil en est éloigné.

III.

Si on approche un objet d'un miroir dont la glace est épaisse, on y remarque deux images; l'une est bien éclairée, & l'autre est représentée avec une lumiere plus foible.

IV.

Lorsqu'on approche fort obliquement une bougie allumée, de l'extrêmité d'un miroir, & qu'on met l'œil à peu près aussi obliquement à l'extrêmité opposée, on apperçoit plusieurs images de la lumiere de la bougie, dont les uns sont plus foibles que les autres.

V.

Si on dispose à angles droits deux miroirs, & qu'on s'approche de l'un en suivant une ligne qui lui soit perpendiculaire, il paroîtra que la même

personne se meut en sens contraire. Car dans celui qui est parallele à la personne qui marche, elle paroîtra aller d'un sens comme du septentrion au midi; mais dans le miroir dont elle s'approche, elle paroîtra aller d'un sens contraire, c'est-à-dire, du midi au septentrion.

VI.

Si deux miroirs font un angle obtus un peu plus grand qu'un droit par rapport à celui qui regarde, il se verra avec un seul œil; mais s'ils font un angle aigu un peu plus petit qu'un droit, il se verra avec trois yeux, deux nez, deux bouches, &c. l'angle des miroirs étant plus obtus ou moins aigu, on verra d'autres figures grotesques.

VII.

Si on dispose dans un cabinet de jardin plusieurs miroirs, les uns plus bas & inclinés à l'horison, & les autres plus haut, aussi inclinés à l'horison, ceux qui entreront dans ce cabinet, se verront d'une figure monstrueuse.

VIII.

Les objets représentés dans un miroir plat, paroissent autant enfoncés derriere le miroir, qu'ils en sont éloignés par devant. Ainsi pour voir un objet qui est dans un petit espace, comme s'il étoit fort éloigné, il faut lui faire faire plusieurs réfléxions sur des miroirs disposés sur les faces d'un poligone.

IX.

Quand on présente quelque écriture à un miroir, elle paroît d'un sens contraire. S'il y a ARREST, les lettres paroissent retournées, &

on lit du même sens qu'il faut les mettre dans les formes des imprimeries.

PROBLEME XX.

Mesurer une hauteur par réfléxion.

I.

Pl. 13, fig. 54.

SI la hauteur est accessible, comme AB, en sorte qu'on puisse approcher de son extrêmité B, & connoître de combien on en est éloigné, lorsqu'on est dans un plan horisontal, & au niveau de cette base B, faites sur ce plan horisontal à une distance connue du point B, un petit creux C, que vous remplirez d'eau. Vous vous éloignerez de ce petit creux, de maniere que vous puissiez voir dans l'eau le sommet A de la hauteur à mesurer AB, par le rayon de réflexion CE, qui passe par l'œil que je suppose en E. Mesurez exactement la hauteur de l'œil ED, & sa distance CD du point C de réflexion. Nous supposerons la hauteur ED de 4 pieds, la distance CD de 3, & la distance BC de 48. Après quoi on dira, par la regle de trois directe, si la distance CD de 3 pieds donne 4 pieds pour la hauteur ED, combien donnera la distance BC de 48 pieds? & l'on trouvera 64 pieds pour la hauteur AB qu'on cherche; car en multipliant ensemble les deux derniers termes, 4, 48, & en divisant leur produit 192, par le premier 3, il vient 64, pour le quatrieme proportionnel.

II.

Mais si la hauteur AB est inaccessible, en sorte qu'on ne puisse pas mesurer actuellement la distan-

e BC, il faudra dans la même plaine faire en ligne droite sur CB prolongée, un autre creux à une distance connue du premier C, comme F, qu'on remplira pareillement d'eau. La même personne s'éloignera encore, de maniere qu'elle puisse voir le même sommet A, par le rayon de réflexion FH, qui passe par l'œil que je suppose en H. J'ai dis la même personne, afin que la hauteur de l'œil GH soit la même que la premiere DE, que nous avons supposée de 4 pieds. Comme nous avons supposé la distance CD de 3, si l'on suppose la distance CF de 32, & la distance FG de 5, en multipliant ensemble les lignes ED, CF, c'est-à-dire 4, 32, & en divisant le produit 128 par l'excès 2 de la distance FG sur la distance CD, on aura 64 pieds pour la hauteur AB qu'on cherche.

REMARQUE.

Si vous voulez connoître la distance BC, sans sçavoir la hauteur AB, multipliez ensemble les deux distances CD, CF, c'est-à-dire 3 & 32, & divisez leur produit 96 par l'excès 2 de la distance FG, sur la distance CD. Le quotient donnera 48 pieds pour la distance BC.

Des miroirs cylindriques & sphériques.

PROBLEME XXI.

Les points de l'œil & de quelque objet, avec le point de réflexion sur la surface convexe d'un miroir sphérique, étant donnés, determiner l'endroit où l'on doit voir l'image de l'objet proposé.

SI l'œil est A, l'objet B, & E le point de réflexion sur la surface convexe DEL d'un miroir

Pl. 21, fig. 69.

Pl. 23. fig. 69.

sphérique, dont le centre est C; tirez de ce centre C, à l'objet B, la droite BC, qui sera perpendiculaire à la surface du miroir sphérique. C'est dans cette lignes BC que sera l'image de l'objet B, sçavoir, au point H, qu'on trouvera en prolongeant le rayon de réflexion AE, qui rencontre ici au dedans du miroir la cathete d'incidence BC au point H : car il la peut rencontrer au point D de la surface du miroir, & au dehors, sçavoir, lorsque l'angle d'incidence BEF, ou l'angle de réflexion AEG sera très petit; ce qui fait que l'objet B peut être vu au dedans du miroir sphérique, comme ici, quelquefois en sa surface, & quelquefois au dehors.

SCHOLIE.

La touchante FG, qui passe par le point E de réflexion, détermine, comme vous voyez, les angles d'incidence & de réflexion, & coupe la cathete d'incidence BC en I, de telle sorte que les quatres lignes BC, CD, BI, DI, sont proportionnelles, & que par conséquent la ligne BC se trouve coupée aux points I, D, dans la moyenne & extrême raison proportionnelle, c'est à dire, que le rectangle sous toute la ligne BC, & sa partie du milieu DI, est égale au rectangle sous les deux autres parties extrêmes BI, CD, comme on le démontrera aisément, en tirant par le point B, la ligne BK parallele au rayon de réflexion AE.

Il est évident, par la propriété des foyers d'une ellipse, que les deux points A, B, sont les foyers d'une ellipse qui touche le miroir sphérique au point de réflexion E, & qui a pour grand axe la somme des deux rayons AE, BE, de réflexion & d'incidence. Ainsi pour trouver le point de réfle-

xion E, il n'y a qu'à décrire une ellipse qui touche la circonférence DEL, & dont les foyers soient les deux points A, B : ce qui se peut aisément faire par l'intersection de la circonférence DEL, & d'une hyperbole entre ses asymptotes, dont l'opposée passe par le centre C de la même circonférence DEL, comme nous avons démontré dans notre *dictionnaire mathématique*.

Pl. 21, fig. 69.

Il est évident aussi, que l'apparence H de l'objet B est plus proche du point de réflexion E, que du centre C : car la ligne CH est toujours plus grande que la ligne EH, puisque l'angle CEH est toujours plus grand que l'angle ECH, comme on le connoîtra en prolongeant vers L le rayon d'incidence BE, & en lui tirant par le centre C, une parallele MN.

Il est encore évident, que la même apparence H de l'objet B, est aussi plus proche du point de réflexion E, ou du point D, de la surface du miroir que l'objet B, c'est-à-dire, que la ligne EH est moindre que le rayon d'incidence BE, & que la ligne DH est moindre que la cathete d'incidence BD.

Enfin il est évident, que si la grandeur OE est perpendiculaire à la surface du miroir sphérique DEL, ensorte qu'étant prolongée elle passe par son centre C, le point P, plus proche du miroir, doit paroître moins enfoncé que le point O, plus éloigné : & que cette grandeur OE doit paroître renversée & plus petite.

D'où il suit qu'une grandeur doit paroître dans un miroir sphérique convexe toujours plus grande à mesure qu'elle s'approche du miroir parallelement à soi même, parce qu'alors elle paroît moins enfoncée, & par conséquent plus près de l'œil, &

qu'elle ſe trouve renfermée dans un plus grand angle. Il arrivera la même choſe ſi l'objet demeure immobile, & que l'œil s'approche du miroir, parce qu'alors il verra cet objet moins enfoncé dans le miroir, & par conſéquent plus grand, puiſqu'il le verra de plus proche.

PROBLEME XXII.

Déterminer le lieu de quelque objet vu par réflexion sur la ſurface d'un miroir cylindrique.

Pl. 20, fig. 67.

CE problême eſt aſſez difficile, parce qu'un miroir cylindrique étant pris ſelon ſa longueur, peut être conſidéré comme un miroir plan : étant pris exactement ſelon ſa rondeur, il peut être conſidéré comme un miroir ſphérique : enfin étant pris en tout autre ſens, il participe des propriétés d'un miroir plan & d'un ſphérique.

C'eſt pourquoi ſi l'œil & le point de quelque objet ſont dans un plan qui paſſe par l'axe du miroir cylindrique, ce point ſera vu par réflexion dans le miroir cylindrique, comme dans un miroir plan, je veux dire auſſi enfoncé dans le miroir qu'il en ſera éloigné.

Comme ſi l'on ſuppoſe l'œil B & un point A de quelque objet, dans un plan qui paſſe par l'axe CD du miroir cylindrique EFGH, ce point A ſera vu par le rayon de réflexion BIM, en M, qui eſt le point où ſe rencontrent ce rayon de réflexion & la ligne ALM, perpendiculaire à la commune ſection EH du miroir & du plan qui paſſe par l'œil & par le point de l'objet A. Dans ce cas, il eſt évident que l'objet A paroît auſſi enfoncé dans le miroir, qu'il en eſt éloigné, c'eſt-à-dire, que les

lignes AL, LM, sont égales entre-elles, à cause des deux triangles rectangles égaux AIL, MLI.

Mais si l'œil & le point de l'objet sont dans un plan parallele à la base du miroir cylindrique, comme la section de ce plan & du miroir est un cercle, l'objet paroîtra dans ce miroir cylindrique, comme nous avons vu qu'il devoit paroître dans un miroir sphérique *. D'où il suit que les grandeurs paralleles à la base d'un miroir cylindrique y paroissent fort raccourcies, & que celles qui sont paralleles à l'axe du même miroir, y paroissent presque de la même grandeur, comme dans un miroir plan. Cela est encore vrai dans un miroir conique, comme il est aisé de le démontrer.

* Prob. préced.

PROBLEME XXIII.

Les points de l'œil & de quelque objet, avec le point de réflexion sur la surface concave d'un miroir sphérique, étant donnés, determiner l'endroit où l'on doit voir l'image de l'objet proposé.

Pl. 22, fig. 71.

SI l'œil est A, l'objet B, & E le point de réflexion sur la surface concave FEG d'un miroir sphérique, dont le centre est C, tirez de ce centre C, à l'objet B, la droite BC, qui étant prolongée, rencontre ici le rayon de réflexion AE, aussi prolongé, au point H, qui sera l'image ou la représentation de l'objet proposé B, parce que ce point H est le contour du rayon de réflexion AE, & de la cathete d'incidence CD tirée du centre C par l'objet B.

REMARQUE.

Si l'objet avoit été plus près du miroir, comme

Pl. 22. fig. 71.

en K, son apparence I se seroit trouvée de l'autre côté, sçavoir, au concours du rayon de réflexion AE, & de la cathete d'incidence CI, tirée du centre C par l'objet K. Si l'objet étoit en L, on ne le verroit point du tout, parce que dans ce cas la cathete d'incidence FG, tirée du centre C par l'objet L, ne rencontreroit point le rayon de réflexion AE, ces deux lignes étant paralleles. Enfin si l'objet étoit en M, son apparence N se trouveroit en dehors, sçavoir, au concours du rayon de réfléxion AE, & de la cathete d'incidence CN, tirée du centre C par l'objet M.

Par-là on voit la raison de ce que l'expérience nous fait connoître, sçavoir, qu'un objet peut être vu par réflexion dans un miroir concave, comme dans un convexe, hors de la surface du miroir, comme est ici le point N, qui est l'image de l'objet M, & en dedans, comme H, qui est l'image de l'objet B, ou I qui est l'image de l'objet K. Ces deux images H, I paroissent enfoncées dans le miroir, mais jamais tant que dans un miroir plan. Cela vient des différens concours des rayons de réflexion, & des cathetes d'incidence, qui peuvent faire voir les objets quelquefois en la surface du miroir, quelquefois en dedans, & d'autres fois en dehors & par devant, plus ou moins loin du miroir; de sorte qu'on les voit tantôt entre l'objet & le miroir, tantôt au lieu même où est l'objet; ce qui fait que l'on peut manier l'image de sa main ou de sa face hors du miroir: tantôt plus loin du miroir que l'objet n'en est éloigné, & tantôt au lieu même où l'œil est placé. D'où il arrive que ceux qui en ignore la raison, ont peur, & se retirent quand ils voyent sortir du miroir l'image d'un épée ou d'une dague, que quelqu'un tient derriere eux.

Il eſt évident que la touchante OP, qui paſſe par le point E de réflexion, determine l'angle d'incidence BEP, & ſon égal, ou l'angle de réflexion AEO : & que la ligne CE, qui eſt perpendiculaire à la touchante OP, diviſe en deux également l'angle AEB, fait par les rayons d'incidence & de réflexion. D'où il ſuit que ſi l'on diviſe en deux également cet angle par une ligne droite, cette ligne droite paſſera par le centre C du miroir ſphérique, parce qu'elle ſera perpendiculaire à la touchante OP.

Il eſt aiſé de juger que l'objet B peut être vu par réflexion en deux endroits différens, lorſque l'œil eſt placé en un certain point : car ſi on mene un rayon d'incidence quelconque BE, avec ſon rayon de réflexion AE, & un autre rayon d'incidence BQ, avec ſon rayon de réflexion QR, il rencontrera le premier en un point, comme A, où l'œil étant mis, il verra l'objet B par les deux rayons de réflexion AE, AQ, & par conſéquent en deux endroits différens, ſçavoir, aux points H, R, au dedans & au dehors du miroir.

Il eſt auſſi facile de juger que ſi l'objet eſt placé au centre C du miroir, ſon image ſe réfléchit contre lui-même : car dans ce cas l'angle d'incidence eſt droit. C'eſt pourquoi celui qui aura l'œil au centre C du miroir, ne pourra voir autre choſe que lui-même.

PROBLEME XXIV.

Des miroirs ardens.

NOus avons vu dans le problême précédent, que deux rayons de réflexions, qui appartien-

* Voyez le probl. XIII de phyſiq.

Pl. 22, fig, 71. nent à un même objet, comme AE, AQ, qui appartiennent à l'objet B, s'unissent & se rencontrent au point A, au devant du miroir; ce qui n'arrive point aux miroirs plans, où les rayons de réflexion s'écartent, & encore moins aux miroirs convexes, où les rayons de réflexion s'écartant encore davantage, s'unissent au-delà du miroir. D'où il suit que par leur moyen on ne peut pas produire du feu, comme l'on fait avec un miroir concave, qu'on appelle pour cela *miroir ardent*, & qui peut être parabolique ou sphérique.

Il est facile de faire des miroirs sphériques, parce que le tour peut aisément servir à en faire des modeles, & qu'on peut aisément les polir : mais le tour ne peut pas être mis si facilement en usage, pour faire des modeles qui puissent servir à construire des miroirs paraboliques; ce qui fait qu'ils sont très-rares, & qu'ils ne sont pas si bons que les sphériques, quoique selon la théorie, ils dussent être meilleurs. C'est pourquoi nous parlerons seulement ici des miroirs sphériques.

Soit donc ABC la surface concave d'un miroir sphérique bien poli, dont le centre soit D, & un demi-diametre BD. Soit EF un rayon de lumiere parallele au demi-diametre BD, qui se réfléchissant par le rayon de réflexion FG, coupera le demi-diametre BD, en un point, comme G, plus proche de la surface du miroir sphérique, que de son centre, c'est à-dire, que la ligne BG sera toujours plus petite que la ligne DG, comme on le connoîtra en tirant le demi-diametre DF, & menant GK perpendiculaire au milieu de DF : le triangle FGD sera isoscelle : les lignes DG, GF, seront plus grandes que DF, égal à BD. Ayant donc ôté DG de part & d'autre, il restera

Pl. 24, fig. 72.

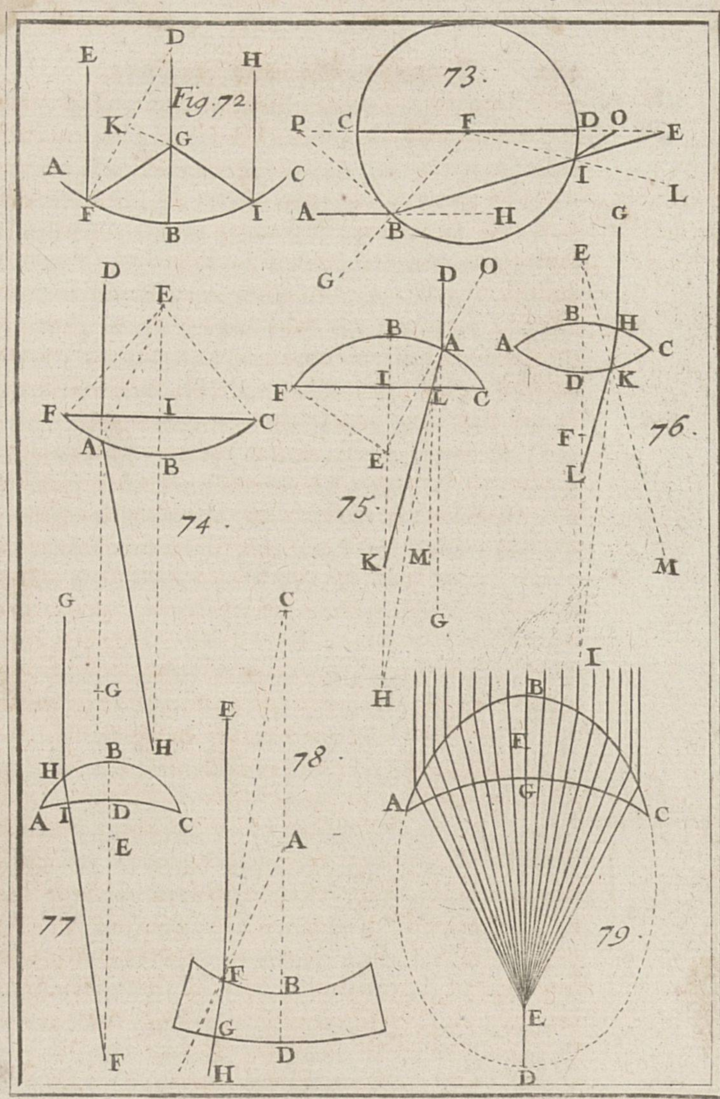
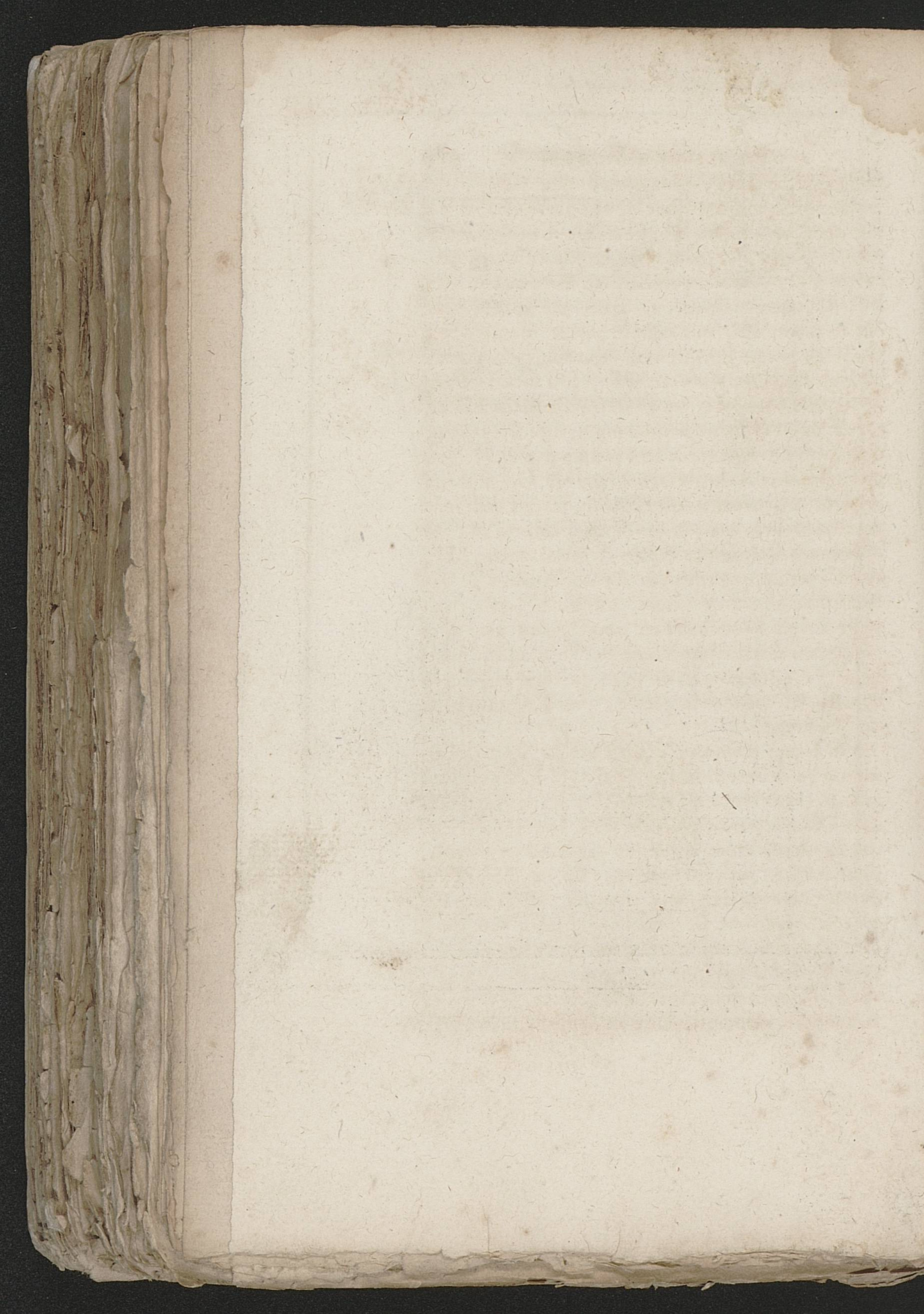


Fig.72
E D H K G A C F B I
73.
P C F D O E I L A B H G
74.
D E F I C A B H G
75.
B A D O F I L C E K M G H
76.
E B H G A C D K F L M I
77
G H B A I D C E F
78.
C E A F B G D H
79.
B F G A C E D



GF, égal à DG, plus grand que GB.

Pl. 23, fig. 72.

Il est aisé de juger que si de l'autre coté il y a un rayon de lumiere HI, parallele au même demi-diametre BD, & aussi éloigné de ce demi-diametre BD, que le rayon EF, en sorte que les arcs BF, BI, soient égaux, ce rayon HI se réfléchira par le rayon IG, qui passera par le même point G. Si ce rayon de lumiere étoit plus ou moins éloigné du demi-diametre BD, son rayon de réflexion ne couperoit pas ce demi-diametre BD au même point G; mais en quelque lieu qu'il le coupe, ce point de rencontre sera toujours plus éloigné du centre que de la surface du miroir. Or, comme on peut concevoir une infinité de rayons différens paralleles entre eux, & au demi-diametre BD, & également éloignés du même demi-diametre BD, il est évident que tous ces rayons doivent se réfléchir en un même point, comme G, qu'on appelle foyer. C'est dans ce point qu'on peut aux rayons du soleil allumer une bougie, ou un flambeau, fondre en peu de tems quelque métal que ce soit, & vitrifier la pierre, quand le miroir est un peu grand.

On peut aisément connoître par la trigonométrie la distance de ce foyer G à la surface du miroir, la distance du rayon d'incidence ou de lumiere étant connue en degrés, & le demi-diametre du miroir étant connu en pieds ou en pouces. Comme si le rayon d'incidence EF est éloigné du demi-diametre BD, par exemple, de 5 degrés, en sorte que l'arc BF, ou l'angle BDF soit de 5 degrés; & si l'on suppose le demi-diametre DB, ou DF de 100000 parties, on trouvera en ces mêmes parties la distance DG, en tirant du foyer G la ligne GK perpendiculaire au demi-diametre DF,

Pl. 24. fig. 72.

qui sera divisé en deux également au point K ; ce qui fait que sa moitié DK sera de 50000 parties, & en faisant dans le triangle DKG cette analogie ;

Comme le sinus total	100000
A la sécante de l'angle D	100382
Ainsi la ligne DK	50000
A la ligne DG	50191

ce nombre 50191 étant ôté du demi-diametre BD, ou de 100000, il restera 49809 pour la ligne GB, ou pour la distance du foyer à la surface concave du miroir.

C'est de cette maniere que nous avons supputé la table suivante, où l'on voit que le foyer G s'approche toujours de la surface concave d'un mi-

1	49992	16	47985	31	41668	46	28022
2	49970	17	47715	32	41041	47	26686
3	49932	18	47427	33	40382	48	25276
4	49878	19	47269	34	39689	49	23787
5	49809	20	46791	35	38961	50	22214
6	49725	21	46443	36	38197	51	20549
7	49625	22	46073	37	37393	52	18787
8	49509	23	45682	38	36549	53	16918
9	49377	24	45268	39	35662	54	14935
10	49229	25	44831	40	34730	55	12828
11	49064	26	44370	41	33749	56	10586
12	48883	27	43884	42	32798	57	8196
13	48685	28	43372	43	31634	58	5646
14	48468	29	42832	44	30492	59	2920
15	48236	30	42265	45	29289	60	0000

roir sphérique, à mesure que les rayons d'incidence s'éloignent du centre du miroir ; de sorte que quand ils en sont éloignés de 60 degrés, le foyer

G se trouve précisément au point B de la surface concave du miroir.

On voit aussi dans cette table, que les rayons d'incidence, depuis un degré jusqu'environ à 15 degrés de distance, s'unissent par réflexion presque en un même point, parce que la distance du foyer G ne décroît pas sensiblement. Ce qui fait qu'une telle quantité de rayons envoyés du soleil sur la surface concave d'un miroir sphérique, qui peuvent passer pour paralleles, à cause de la grande distance du soleil à la terre, se réfléchit presque en un même point. Par conséquent tous les rayons de réflexion qui se trouvent compris dans une portion concave de sphere d'environ 30 degrés, peuvent par leur union produire du feu, comme l'expérience le montre.

On voit encore dans la table précédente, que le foyer G est éloigné de la surface concave du miroir d'environ la quatrieme partie du diametre, ou de la moitié du demi diametre BD, & que par conséquent un miroir concave sphérique doit brûler d'autant plus loin, que son diametre sera plus grand. il ne faut pourtant pas croire qu'il puisse brûler à une distance énorme; car outre la difficulté qu'il y auroit à faire un miroir assez grand, pour produire cet effet; les rayons de réflexion qui s'unissent en un trés-petit espace vers G dans un petit miroir, ne s'uniroient pas si parfaitement dans un grand miroir, ce qui diminueroit considérablement la force des rayons. Ainsi il n'est pas croyable qu'Archimede se soit servi d'un miroir concave pour brûler la flote des Romains à une distance de 375 pas géometriques, qui reviennent à 1875 pieds.

COROLLAIRE.

Pl. 24, fig 72. Il suit de ce qui a été dit dans ce problême & dans le précédent, que si l'on met un corps lumineux, comme une chandelle, au foyer, G ses rayons se réfléchiront par des lignes paralleles entre elles & au demi-diametre BD : & que si on la met au centre D, ses rayons se réfléchiront contre eux-mêmes, parce qu'alors ils seront perpendiculaires à la surface du miroir.

On peut par le moyen d'un semblable miroir, représenter tels caracteres qu'on voudra sur une muraille obscure, pourvu que le miroir n'en soit pas fort eloigné. On écrira sur la surface concave du miroir avec de la cire ou autre matiere, des lettres renversées, & d'un caractere un peu gros, & on exposera le miroir au soleil, de maniere que les rayons renvoyés vers la muraille, y fassent paroître les lettres, qui se trouveront dans leur situation ordinaire.

On peut aussi, par le moyen du même miroir, augmenter la lumiere dans une grande chambre, en appliquant une bougie allumée au foyer de ce miroir ; car les rayons de cette bougie se réfléchiront par toute la chambre, & feront une telle clarté, qu'on pourra aisément lire de loin sur les murailles.

Enfin on peut se servir de la même façon de ce miroir pour s'éclairer la nuit, & voir de bien loin ce qui se passe : il peut être utile à ceux qui veulent conserver leur vue, en se servant de la lumiere d'une lampe mise au foyer du miroir, qui doit être placé un peu haut, & à côté, afin qu'il puisse envoyer commodément la lumiere de la lampe sur la table ou l'on veut lire, ou écrire.

Remarques

Remarques sur les miroirs concaves.

I.

Les miroirs ardens se font ordinairement de métal; la réflexion s'y fait plus facilement, & l'effet en est plus prompt & plus vigoureux. On peut aussi les faire de verre, la réflexion s'y fera presque aussi bien, pourvu que le verre soit bien net & un peu mince, que l'enduit en soit bon, pour empêcher les rayons d'incidence de traverser & de se briser.

II.

Pour trouver facilement le foyer d'un miroir concave, quand il est exposé aux rayons du soleil, il faut éloigner ou approcher du miroir une petite piece de bois, ou de quelqu'autre matiere solide, en telle sorte que le disque de lumiere qui paroîtra par réfléxion contre cette piece, paroisse le plus petit qu'il sera possible; car alors la piece se trouvera au foyer. Ou bien on mettra de l'eau chaude auprès du miroir du côté de la concavité qui regarde directement le soleil: la fumée qui sortira de cette eau chaude, fera voir avec plaisir le cone de réflexion, dont la pointe sera le foyer. Ou bien encore on jettera de la poussiere au-devant de la concavité du miroir qui regarde directement le soleil; on connoîtra dans cette poussiere, comme dans la fumée, le cone de lumiere réfléchie, & par conséquent sa pointe, qui sera le foyer qu'on cherche. On peut même en hyver remarquer ce foyer & tout le cone de réflexion sans poussiere & sans fumée, lorsque l'air sera grossier & condensé par le froid.

III.

Quoiqu'il ſemble que pour produire du feu par le moyen d'un miroir concave, il doive être éclairé des rayons du ſoleil, afin que la réflexion s'y puiſſe faire, on peut néammoins en produire dans un lieu obſcur, en renvoyant les rayons du ſoleil contre la concavité de ce miroir par le moyen d'un miroir plan, qui doit être un peu grand, afin qu'un plus grand nombre de rayons s'uniſſant au foyer, puiſſe brûler avec plus de force.

IV.

Wolfius remarque dans ſa catoptrique, que Kirker étant à Siracuſe, avoit obſervé que la diſtance à laquelle les vaiſſeaux des Romains auroient dû être brûlés, n'étoit que de trente pas. Quoique cette diſtance ſoit bien moindre que celle qu'on a rapporté ſur la fin du problême XXIV, elle eſt cependant encore aſſez conſidérable pour faire douter de la vérité du fait; puiſqu'Archimede auroit dû ſe ſervir d'une portion de ſphere dont le diametre auroit eu plus de 120 pieds. Une telle portion de ſphere auroit fort approché de la figure plate, & par conſéquent elle n'auroit pu faire un grand effet. On dit encore que Proclus, par le même artifice qu'Archimede, brûla la flote de Vitalien qui aſſiégeoit Biſance: mais la vérité de ces faits eſt fort incertaine, pour la raiſon qu'on vient de dire.

V.

Il vaut mieux s'en tenir à ce que dit le même Wolfius de quelques miroirs qui ſont très-remarquables. Manfrede Septala, chanoine de Milan,

avoit un miroir parabolique, dont le foyer étoit à 15 ou 16 pas, où il brûloit des morceaux de bois. Vilette, ouvrier de Lyon, avoit fait trois miroirs, dont les effets rapportés par Wolfius, sont très-dignes de remarque; leur foyer étoit assez large, & n'étoit éloigné que de trois pieds. L'un de ces miroirs fut présenté au roi de Perse par Tavernier, connu par ses voyages : l'autre fut acheté par le roi de Dannemark, & le troisieme fut donné au roi de France. M. Tschirnaus en avoit fait un qui l'emportoit sur tous ceux-là : il étoit composé d'une lame de cuivre, qui n'étoit gueres plus épaisse que deux fois le dos d'une lame de couteau ordinaire : la largeur du miroir étoit d'environ trois aulnes de Lipsick, & son foyer n'avoit que deux de ces aulnes de distance. Voici quelque-uns de ses effets.

1°. Il mettoit le feu en un moment à un morceau de bois mis à son foyer; la flamme exposée au plus grand vent, ne s'éteignoit point. 2°. Il faisoit bouillir l'eau avec tant de violence, que les œufs qu'on y mettoit étoient bien-tôt cuits, & si on laissoit l'eau un peu de tems, elle s'évaporoit entiérement. 3°. Un morceau d'étain ou de plomb présenté au foyer se fondoit goutte à goutte, & étoit percé en deux ou trois minutes. 4°. Des lames de fer, d'acier, de cuivre, d'argent, &c. devenoient rouges sur le champ, & étoient percées en moins de six minutes. 5°. Les pierres, les briques, & les autres matieres qui ne se liquéfient point, devenoient rouges comme un fer ardent. 6°. L'ardoise, les tuiles, les morceaux de pots cassés, qui avoient souffert un feu violent, les pierres de ponce, les morceaux de creuset, les os, les motes de terre se changeoient en verre.

VI.

A l'imitation du miroir de M. Tſchirnaus, un artiſan de Dreſde en fit quelques-uns de bois, qui produiſoient des effets preſque auſſi ſurprenans. Trabere rapporte qu'on peut faire des miroirs ardens avec des morceaux d'or, * ou de verre. On les diſpoſe dans une jatte de bois, creuſée en forme de miroir ſphérique; on les y attache avec de la poix mêlée de cire, dont on a enduit également le dedans de la jatte. Zahn rapporte auſſi qu'un ingénieur nommé Neuman, fit * à Vienne en Autriche, un miroir concave, qui étoit compoſé de carton fort & de paille collés enſemble. Ce miroir avoit aſſez de force pour faire fondre toutes ſortes de métaux.

* Auro ſtrepero

* En 1699.

VII.

Il y a du plaiſir à regarder dans les miroirs concaves, ſur-tout lorſque ce ſont des portions de grande ſphere. Si on en approche d'aſſez près, on ſe voit une face fort large, un nez extrêmement long, de grands yeux, les cheveux & la barbe d'une groſſeur conſidérable; le poil folet y paroît comme une groſſe barbe : enfin on remarque ſur le viſage les moindres tâches & des monticules ſur la peau qui paroît ſans miroir la plus unie. Si on s'éloigne du miroir à une certaine diſtance, on s'y voit renverſé. Si on ſe met à une autre diſtance, & qu'on avance la main ou une épée nue, on apperçoit l'image de la main ou celle de l'épée entre ſoi & le miroir : il ſemble qu'on ſe touche les doigts, & que l'épée même avance vers l'œil, quand on la porte vers le miroir. Un flambeau, préſenté derriere la perſonne qui regarde le miroir,

paroîtra lui venir brûler le visage. Peut-être y auroit-il quelque plaisir à voir les figures d'un singe, à qui on présenteroit un miroir concave, & qui verroit sa patte & son image au dehors.

VIII.

Quand on place l'œil au centre du miroir concave, on ne voit qu'un grand œil représenté près de la surface du miroir. Si le miroir dont on se sert est une portion d'une petite sphere, on s'y voit d'une figure monstrueuse, avec deux nez, trois yeux, deux bouches, quelquefois avec des yeux qui n'ont qu'une seule paupiere, entre deux nez. On peut examiner ce qui arriveroit, si on enchâssoit un miroir concave entre deux miroirs plats, &c.

IX.

Si le verre du miroir est teint de quelque couleur, il la communique à celui qui se regarde; en sorte qu'on se voit pâle, cendré, livide, &c. suivant les couleurs qu'on a donné à la glace du miroir.

Voyez les remarq. du prob. XLII.

X.

Il seroit difficile de rapporter toutes les différentes situations où l'on peut placer le miroir, pour y représenter des figures surprenantes. Je me contenterai de rapporter celle-ci, qui est de placer un miroir fait d'une portion de grande sphere au haut du plancher : on s'y verra comme pendu en l'air hors du miroir; la tête paroîtra en haut & les pieds en bas, dans la même situation qu'un pendu.

PROBLEME XXV.

Construire une chambre optique, où l'on voit les objets plus grands que la boîte.

Pl. 23, fig. 31.

FAites une boîte quarrée ABCDEFG, convenable pour le miroir concave, dont vous voulez vous servir : il faut que le centre du miroir tombe hors de la boîte, c'est-à-dire, qu'il faut que la largeur AD de la boîte soit plus petite que le rayon de la sphere dont le miroir est une portion. Couvrez le dessus de la boîte d'un parchemin transparent, comme celui qu'on a décrit au problême XVIII, ou d'un verre bruni & non poli.* Appliquez à la face intérieure ABG un miroir concave ; on doit préférer une portion de grande sphere ; placez à la face intérieure opposée DEFC, quelque image peinte, comme celle d'un homme, d'un bâtiment, &c. ménagez au haut de cette même face en IH une ouverture en long, que vous garnirez d'un verre poli. Lorsqu'on regardera par cette ouverture, on verra la peinture beaucoup plus grande que la boîte.

PROBLEME XXVI.

Faire le moule d'un miroir concave sphérique.

1°. AYant pris de la boue déssechée, & l'ayant réduite en poudre, passez-la au tamis pour en ôter le gravier & les autres ordures.

2°. Détrempez cette poudre tamisée dans de

* On brunira ce verre, en le frottant sur une surface plane avec du menu sable broyé.

l'eau, & étant réduite en bouillie, passez-la par un bluteau, ou tamis.

3°. Prenez de la fiente de cheval & de la bourre; mêlez-la avec cette masse jusqu'à ce que ce composé ne fasse plus qu'un corps d'une certaine consistance. On y peut joindre du poussier ou de la brique bien pilée & passée au crible.

4°. Avec de la pierre que l'on trouve dans les sablonieres, faites deux moules grossierement ébauchés, dont l'un sera convexe & l'autre concave: puis frottez l'un dans l'autre, jusqu'à ce qu'ils s'emboîtent bien ensemble; & pour y réussir plus aisément, vous aurez soin de mettre entre ces deux moules, du sable mouillé, qu'il est bon d'avoir passé auparavant au crible, afin qu'il n'y reste point de gravier, ni de petites pierres, qui pourroient gâter la surface des moules.

5°. Servez-vous d'un rouleau de bois pour étendre sur une table ce lut ou cette masse ci-devant préparée, jusqu'à ce qu'elle ait l'épaisseur que vous voulez donner au miroir sphérique. Ce lut étant ainsi étendu, vous le soupoudrerez de poudre de briques pilées, afin qu'il ne s'attache point au moule convexe, dont vous lui ferez prendre la figure, en le mettant dans ce moule.

6°. Après qu'il sera sec, vous le frotterez de quelque graisse, & le remplirez d'un couvercle fait de la même matiere, c'est-à dire, du même lut.

7°. Ce couvercle étant sec, vous ôterez le lut qui a la figure du miroir, & qui occupe la place qui est entre le moule de pierre & le couvercle, puis vous frotterez le dedans du moule de pierre d'une composition faite avec de la craie & du lait, & vous mettrez le couvercle dessus.

8°. Mais pour empêcher que ce couvercle e

tombe au fond du moule de pierre, vous y ferez un rebord, qui s'appuiera sur le bord du moule de pierre, de maniere qu'étant posé dans le moule de pierre il y occupe la même place qu'il occupoit lorsque le moule du miroir y étoit.

9°. Enfin vous garnirez de fil de fer le dehors du moule de pierre, & vous ménagerez au rebord deux trous, afin que quand on versera la matiere du métal par l'un, l'air enfermé entre ces moules, puisse sortir par l'autre.

PROBLEME XXVII.

Faire la composition que l'on emploie aux miroirs de métal.

PRenez huit parties d'un cuivre qui n'ait point encore servi, deux parties d'étain d'Angleterre, & cinq parties de marcassite; faites-les fondre ensemble : puis vous prendrez au bout d'un fer chaud un peu de cette matiere fondue : si étant refroidie elle est trop rouge, vous y mettrez un peu d'étain; mais si elle est trop blanche, vous y ajouterez un peu de cuivre, jusqu'à ce que la couleur soit convenable; enfin vous verserez cette matiere fondue dans le moule préparé au problême précédent.

REMARQUE.

On peut encore faire une autre composition avec dix parties de cuivre, quatre parties d'étain d'Angleterre, quelque peu d'antimoine & de sel ammoniac; on remue cette matiere fondue avec une baguette ou spatule, jusqu'à ce qu'il en sorte une vapeur, qu'il faut bien prendre garde de respirer, parce que c'est un poison.

PROBLEME XXVIII.

Polir les miroirs de métal.

VOus ajusterez avec de la poix noire une molette ou poignée de bois au miroir de métal, & vous le frotterez sur le moule rond de pierre, dont on a parlé au problême XXVI, en y mettant d'abord du sable ou grès broyé & mouillé. Quand le miroir sera bien frotté, vous n'emploierez plus de grès; cependant vous frotterez jusqu'à ce que vous le voyiez propre à être poli. Alors vous laisserez sécher le moule rond de pierre, & quand il sera sec, vous l'envelopperez d'un papier blanc, sur lequel vous mettrez du tripoli & de la potée d'étain : vous frotterez le miroir jusqu'à ce qu'il soit bien poli.

REMARQUE.

On polit de la même maniere les miroirs de verre; mais il faut les frotter dans le moule creux.

Du sable ou grès.

Le sable ou grès dont on a parlé dans les problêmes précédens, & dont on se sert principalement pour travailler le verre & le polir, est fait avec des morceaux de meules à aiguiser. On les broie pour les réduire en poudre : on doit avoir trois ou quatre sortes de cette poudre, qui auront chacune leur degré de force, pour les employer selon la qualité de l'ouvrage qu'on veut faire. On les sépare fort commodément de cette sorte : on met tout le gros broyé dans un grand vaisseau plein d'eau, que l'on remue beaucoup

pendant quelque tems : on le laiſſe un peu repoſer ; pendant ce tems tout le plus gros va au fond. Alors inclinant promptement ce vaiſſeau, on verſe toute l'eau encore trouble dans un autre : on laiſſe auſſi repoſer cette ſeconde eau un peu de tems, puis on verſe cette eau dans un troiſieme vaiſſeau, & ainſi de ſuite : de cette maniere on a le grès qui ſe trouve au fond des vaiſſeaux dont on a verſé l'eau, & ces différens grès ont des degrés de force différens, ſuivant le nombre des vaiſſeaux où l'on a reçu ces eaux troubles, qu'on a laiſſé repoſer. On conſerve ces diverſes ſortes de grès dans des vaiſſeaux ſéparés.

Du tripoli.

Le tripoli eſt une pierre ou eſpece de terre ; le meilleur eſt celui qui vient d'Allemagne, & celui qu'on tire d'une montagne près de Rennes en Bretagne : mais le tripoli qu'on apporte d'Auvergne n'eſt pas ſi eſtimé : de quelque endroit qu'il vienne, il faut choiſir le plus léger. On peut employer le tripoli tel qu'on le tire de la terre ſans autre préparation, lorſqu'il a de bonnes qualités.

La ſeconde maniere de préparer le tripoli, eſt de le broyer en le détrempant avec de l'eau-de-vie, ou à ſon défaut avec du vin blanc, & d'en mettre une certaine quantité dans un vaiſſeau de verre bien bouché. Quand ce tripoli aura reſté quatre ou cinq mois dans ce vaiſſeau, il ſera fort adouci : on en prendra ce qu'on jugera à propos pour en faire de petites maſſes, qu'on laiſſera ſécher à l'ombre. On s'en ſert à ſec, quoiqu'on puiſſe auſſi l'employer tel qu'on le retire du vaiſſeau où il aura été gardé.

La troisieme maniere de préparer le tripoli sert à l'adoucir extrêmement, & à augmenter sa qualité détersive. On emplit de tripoli deux creusets, que l'on met l'un sur l'autre, on les lute bien, tant à leur jointure que tout à l'entour; ensuite on laisse sécher le lut à l'ombre, afin qu'il ne se fende point. On met ces creusets dans un four de boulanger, où les ayant enterré dans la braise, on les laisse au moins pendant deux jours. C'est un excellent tripoli, qui peut être employé sec ou détrempé.

De la potée d'étain.

Il y a deux sortes de potée d'étain, l'une qui est blanche & l'autre qui est grise. Celle-ci se fait avec des ratures d'étain qu'on jette dans l'eau forte, où elle se précipite, & se résout en une poussiere grisâtre & très-subtile, mais cependant plus grossiere que la blanche.

La potée blanche se fait de cette maniere. On met de l'étain fin d'Angleterre dans un pot de terre qui puisse résister au feu: on couvre ce pot, & on le lutte avec de la terre de potier bien corroyée & mêlée avec de la bourre. On laisse sécher ce lut, puis on met le pot dans un four de potier de terre, avec les autres vaisseaux; on l'y laisse jusqu'à ce qu'il soit refroidi de lui-même. Cela étant fait, on trouve dans le pot une potée très-blanche, qui n'est que l'étain parfaitement calciné. Voyez la dioptrique oculaire du pere Cherubin d'Orleans, pag. 353, 354.

Des ſpheres de verre, propres à produire du feu aux rayons du ſoleil.

ON peut encore produire du feu aux rayons du ſoleil avec une ſphere de verre de criſtal, ou de quelque autre matiere qui puiſſe facilement être pénétrée par la lumiere, comme avec de l'eau renfermée dans une bouteille bien ronde, ou avec une ſphere de glace. Ce feu n'eſt pas produit par réflexion, mais par réfraction, qui peut auſſi aſſembler en un point pluſieurs rayons de lumiere paralleles entre eux. Ces rayons entrant dans la ſphere, ſe briſent en s'approchant de la perpendiculaire, & en ſortant de la ſphere ils ſe briſent de nouveau en s'ecartant de la perpendiculaire. Ce qui les fait approcher du diametre de la ſphere qu'ils rencontrent en dehors dans un point qui eſt le foyer: mais l'effet n'eſt pas ſi prompt, ni ſi vigoureux que dans un miroir ardent.

PROBLEME XXIX.

Trouver le foyer d'une ſphere ou boule de verre.

Pl. 24, fig. 73.

SOit BCD une ſphere ou boule de verre, dont le centre ſoit F, & CD un diametre. Soit un rayon de lumiere ou d'incidence AB, qui rencontrant la ſurface de la boule de verre en B, la pénetre, & entre dedans: mais au lieu de continuer ſelon la ligne droite ABH, comme il arriveroit, s'il ne rencontroit aucune réſiſtance, il ſe briſe en ce point B, lequel à cauſe de cela eſt appellé point de réfraction, & en s'approchant de la perpendiculaire GBF vers le centre F, il

continue selon la ligne BI. Cette ligne BI étant prolongée, rencontre le diametre CD, aussi prolongé au point E, qui seroit le foyer, si le rayon brisé BI ne se brisoit de nouveau au point I, par la ligne IO, qui, en s'écartant de sa perpendiculaire IL, va rencontrer le diametre CD au point O, qui est le foyer.

Pl. 24, fig. 73.

Avant que d'enseigner à trouver ce foyer O, ou sa distance DO à la surface de la boule de verre, nous expliquerons ici quelques termes & quelques propriétés des angles brisés & des angles de réfraction dans le verre, qui ne sont pas les mêmes dans les autres corps diaphanes, comme l'expérience le fait connoître.

Si la ligne AB est un *rayon d'incidence*, la droite BI s'appelle *rayon de réfraction*, & l'angle HBI se nomme *angle de réfraction*. La droite BG, qui est perpendiculaire à la surface de la boule, s'appelle *axe d'incidence*. La ligne BF, qui passe par le centre, & qui n'est que la ligne BG prolongée, se nomme *axe de refraction*.

Le plan qu'on imagine par le rayon d'incidence AB, & par le rayon de réfraction BI, s'appelle *plan de réfraction* : il est toujours perpendiculaire à la surface de la boule qu'on nomme *surface rompante*, parce que le rayon d'incidence se brise au point où il rencontre cette surface. Il est évident que le plan de réfraction passe par les axes d'incidence & de réfraction, & qu'il contient l'angle de réfraction, HBI, l'angle IBF, qu'on appelle *angle brisé*, & l'angle ABG, qui se nomme *angle d'inclinaison*, lequel est toujours égal au complément de l'angle d'incidence ABP.

L'angle brisé croît ou décroît à mesure que l'angle d'inclinaison est plus grand ou plus petit ;

Pl. 24, fig. 73.

de ſorte que quand l'un de ces deux angles eſt nul, l'autre angle eſt auſſi nul. Comme ſi la perpendiculaire BG eſt un rayon d'incidence, l'angle d'inclinaiſon ſera nul; ce rayon d'incidence GB en pénétrant le verre, ne ſe briſera point, mais continuera en ligne droite vers le centre F, ce qui fait que l'angle briſé eſt auſſi nul. Ainſi vous voyez que lorſque le rayon d'incidence eſt perpendiculaire à la ſurface rompante, il ne ſe fait aucune réfraction, parce qu'il n'y a aucune raiſon pour laquelle cette réfraction ſe doive faire plutôt d'un côté que d'un autre.

Quoique l'angle briſé croiſſe à meſure que l'angle d'inclinaiſon augmente, néanmoins il ne croît pas de la même façon, c'eſt-à-dire, que ſi l'angle d'inclinaiſon augmente par exemple d'un degré, l'angle briſé n'augmentera pas auſſi d'un degré. Mais cette augmentation eſt telle, que les ſinus des angles d'inclinaiſon dans un même milieu ſont proportionnels aux ſinus de leurs angles briſés dans un autre milieu plus facile ou plus difficile à pénétrer: de ſorte que le ſinus d'un angle d'inclinaiſon eſt au ſinus de ſon angle briſé, comme le ſinus d'un autre angle d'inclinaiſon eſt au ſinus de ſon angle briſé. C'eſt pourquoi ſi l'on a une fois connu par expérience un angle briſé, pour quelque angle d'inclinaiſon que ce ſoit, il ſera facile de connoître par ſupputation les angles briſés pour tous les autres angles d'inclinaiſon.

Parce que les deux lignes AH, CD, ſont paralleles, l'angle E eſt égal à l'angle de réfraction HBE: & parce que dans tout triangle rectiligne les ſinus des angles ſont proportionnels à leurs côtés oppoſés, on connoît que le ſinus de l'angle briſé EBF, eſt à ſon côté oppoſé EF, comme

le ſinus de l'angle BFC, ou de l'angle d'inclinaiſon ABG, au rayon de réfraction BE. Et comme on a reconnu par expérience, que lorſque la boule BCD eſt de verre, le ſinus de l'angle briſé EBF eſt au ſinus de l'angle d'inclinaiſon ABG, ou BFC, comme 2 eſt à 3, il s'enſuit que ſi la ligne EF eſt de 200 parties, le rayon de réfraction BE en doit contenir 300. Ainſi on peut facilement trouver, par la trigonométrie, l'angle E, ou l'angle de réfraction HBE, l'angle briſé EBF, & le demi-diametre BF, lorſque l'on connoît l'angle d'inclinaiſon ABG, ou ſon égal BFC, dans le triangle obliquangle BEF, où trois choſes ſont connues; ſçavoir, le côté BE de 300 parties, le côté EF de 200, & l'angle BFE, qui eſt le reſte, à 180 degrés de l'angle BFC, qui eſt égal à l'angle d'inclinaiſon ABG, que l'on ſuppoſe connu.

Suppoſons que l'angle d'inclinaiſon ABG ſoit de 10 degrés, auquel cas l'angle BFE ſera de 170 degrés, & qu'on veuille trouver l'angle briſé EBF, on fera cette analogie,

Comme le côté BE	300
Au ſinus de l'angle oppoſé BFE	17365
Ainſi le côté EF	200
Au ſinus de l'angle briſé EBF	11577

qui ſe trouvera d'environ 6°, 39′, & qui étant ôté de l'angle BFC, ou de l'angle d'inclinaiſon ABG, que nous avons ſuppoſé de 10 degrés, donnera 3°, 31′, pour l'angle de réfraction HBE, ou pour l'angle E, qui ſervira à trouver le demi-diametre BF, par cette analogie.

Pl. 24, fig. 73.

Comme le ſinus de l'angle BFE	17365
A ſon côté oppoſé BE	300
Ainſi le ſinus de l'angle E	5843
A ſon côté oppoſé BE	101

Mais ſi le demi-diametre BF eſt déja connu, comme s'il avoit 100 parties, on trouvera dans les mêmes parties la ligne EF, en faiſant dans le même triangle BEF, cette analogie,

Comme le demi-diametre BF	101
A la ligne EF	200
Ainſi le même demi-diametre BF	100
A la même ligne EF	198

à laquelle ajoutant le demi-diametre FC, 100, on aura 298 pour la ligne CF.

C'eſt de cette maniere qu'on a ſupputé la table ſuivante, où l'on trouve vis-à-vis de l'angle d'in-

ABG	EBF	HBE	CE	ABG	EBF	HBE	CE
1	0. 40	0. 20	300	11	7. 18	3. 42	297
2	1. 20	0. 40	300	12	7. 58	4. 2	297
3	2. 0	1. 0	300	13	8. 38	4. 22	297
4	2. 40	1. 20	300	14	9. 16	4. 44	296
5	3. 20	1. 40	300	15	9. 56	5. 4	295
6	4. 0	2. 0	299	16	10. 35	5. 25	295
7	4. 40	2. 20	299	17	11. 14	5. 46	294
8	5. 19	2. 41	298	18	11. 53	6. 7	293
9	5. 59	3. 1	298	19	12. 32	6. 28	292
10	6. 39	3. 21	298	20	13. 11	6. 49	292

clinaiſon ABG, la quantité de l'angle briſé EBF, &

& de l'angle de réfraction HBE, avec celle de la ligne CE; le diametre CD de la sphere de verre étant supposé de 200 parties. Pl. 24, fig. 73.

Nous n'avons pas prolongé cette table au-delà du vingtieme degré d'inclinaison, parce qu'elle suffit pour faire voir en quelle proportion la ligne CE décroît, car elle décroît fort lentement, étant par-tout à peu près égale à trois demi diametres, puisque sa plus grande différence n'est qu'environ de la vingt-cinquieme partie du diametre; ce qui fait que la ligne DE est presque égale au demi diametre de la même sphere, c'est-à-dire, la ligne DF.

Cette ligne DE, qui se trouve de 92 parties pour un angle d'inclinaison de 20 degrés, comme on le connoît en ôtant CD de CE, ou 200 de 292, servira à trouver le foyer O. Mais il faut remarquer auparavant que l'angle brisé EBF est presque double de l'angle de réfraction HBE, & que cet angle de réfraction HBE est à peu près égal à la troisieme partie de l'angle d'inclinaison ABG, comme on le voit sans peine dans la table précédente.

Pour trouver le foyer O, on considérera que puisque les lignes DE, DF, sont presque égales, les angles IEF, IFE étant à peu près égaux, ce qui fait que l'angle EIL qui leur est égal, est presque double de chacun, & par conséquent de l'angle E. Cela étant supposé, si on considere la ligne OI comme un rayon d'incidence, en sorte que l'angle OIL soit un angle d'inclinaison, alors la ligne IB sera un rayon de réfraction, l'angle OIE sera un angle de réfraction, & l'angle EIL un angle brisé. On connoîtra aussi que cet angle brisé EIL est double de l'angle de réfraction EIO, comme nous avons remarqué auparavant.

Pl. 24, fig. 73.

D'où il suit que les deux angles E, EIO, sont égaux entre eux, & que par conséquent les lignes OE, EI, sont aussi égales entre elles. Et parce que la ligne OI est presque égale à la ligne OD, la ligne OE sera aussi presque égale à la ligne OD. Ainsi le foyer O est à peu près au milieu de la ligne DE, & par conséquent la ligne DO est égale à la moitié de la ligne DE, ou du demi-diametre DF. Si donc on prend sur le diametre prolongé la ligne DO égale à la moitié du demi-diametre DF, ou au quart du diametre CD, on aura en O le foyer qu'on cherche.

REMARQUE.

L'angle EBF, qui est un angle brisé à l'égard du rayon d'incidence AB, qui sortant de l'air pour entrer dans le verre, se brise par la ligne BE, qui est un rayon de réfraction, devient un angle d'inclinaison à l'égard du rayon d'incidence IB, qui sortant du verre pour entrer dans l'air, se brise réciproquement par la ligne AB, qui sera un rayon de réfraction. Et comme cet angle EBF est double de l'angle de réfraction HBE, on voit que lorsqu'un rayon d'incidence sort du verre pour entrer dans l'air, l'angle d'inclinaison est double de l'angle de réfraction; ce qu'il est bon de remarquer, parce que cela nous servira pour le problême suivant.



Des lentilles de verre, propres a produire du feu aux rayons du soleil.

LEs lentilles de verre qui servent à produire du feu, étant exposées directement aux rayons du soleil, peuvent être plates d'un côté & convexes de l'autre, comme un segment de sphere; ou bien convexes des deux côtés, comme les lunettes des vieillards, & les microscopes qui grossissent extraordinairement les objets, & servent à découvrir les moindres parties & les plus petits corps de la nature; ou bien convexes d'un côté & concaves de l'autre: celles-ci ne sont pas si utiles que les autres, parce qu'elles ne peuvent servir à produire du feu que quand leur convexité est tournée directement au soleil; car lorsque leur concavité regarde le soleil, les rayons de réfraction au lieu d'être *convergens* deviennent *divergens*, c'est-à-dire, qu'ils s'écartent les uns des autres; ce qui les empêche de s'unir, & de produire du feu, comme nous ferons voir dans la suite.

PROBLEME XXX.

Trouver le foyer des lentilles de verre convexes d'un côté & planes de l'autre, faites en forme de segment de sphere.

I.

EXposons premierement au soleil la surface plane FC de la lentille de verre FBC, dont la convexité FBC a son centre E dans l'axe d'incidence EBH, qui divise l'arc FBC en deux également au point B, & sa corde FC aussi en deux également au point I. C'est aussi dans cet axe EH

Pl. 24, fig. 74

Pl. 24, fig. 74.

que se trouve le foyer H de tous les rayons d'incidence qui lui sont paralleles, & par conséquent perpendiculaires à la surface plane FC. Ce foyer H, ou sa distance BH depuis la convexité du miroir, se déterminera en cette sorte.

Soit un rayon d'incidence DA, lequel étant parallele à l'axe d'incidence EH, tombera sur la surface plane FC à angles droits, & la traversera par conséquent sans se briser; mais étant parvenu au point A de la surface convexe, il se brisera en sortant du verre; & au lieu d'aller droit en G, il se détournera par le rayon de réfraction AH, qui coupera l'axe d'incidence EH au point H, où tous les autres rayons d'incidence, paralleles au rayon DA, s'uniront par réfraction, pourvu néanmoins que l'arc BC ou BF ne soit pas plus grand que 20 degrés; car les rayons de réfraction ne s'uniroient pas au même point H, mais plus près du point B, si ces arcs étoint plus grands que 20 degrés, comme on l'a vu dans le problême précédent. Ainsi le point H sera le foyer, parce que c'est le lieu où les rayons du soleil s'unissant par réfraction, peuveut produire du feu.

Cela étant supposé, on considérera que l'angle d'inclinaison DAE, ou son égal AEH, étant double de l'angle de réfraction GAH, ou AHE son égal, comme nous avons vu au problême précédent, le sinus de l'angle AEH sera presque double du sinus de l'angle AHE, à cause de la petitesse de ces angles. Mais parce que dans un triangle rectiligne les côtés sont proportionnels aux sinus de leurs angles opposés, le côté AH sera aussi presque double du côté AE; & comme le côté AH approche d'être égal à la ligne BH, il s'ensuit que la distance BH du foyer H à la surface convexe

FBC eſt preſque double du demi-diametre AE, ou BE, & que par conſéquent toute la diſtance EH eſt à peu près triple de ce demi-diametre.

II.

Mais ſi l'on tourne la partie convexe FBC vers le ſoleil, le rayon DA, & tous les autres paralleles à l'axe d'incidence EB, ſe briſeront deux fois avant que de s'unir au point K, qui ſera le foyer; une fois en entrant dans le verre par la ligne AH, qui s'approche de la perpendiculaire EAO; & une ſeconde fois en ſortant du verre par la ligne LK, qui s'écarte de la perpendiculaire LM.

Pl. 24, fig. 75.

Il eſt évident, par ce qui a été dit au problême précédent, que dans la premiere réfraction l'angle d'inclinaiſon DAO, ou AEB, eſt triple de l'angle de réfraction GAH, ou AHE, & que par conſéquent la ligne AH eſt triple du demi-diametre EA. Mais parce que la ligne AH eſt preſque égale a la ligne BH, cette ligne BH ſera auſſi preſque triple du même demi-diamettre AE, ou BE, comme auparavant : ce qui fait connoître que le foyer ſeroit en H, s'il n'y avoit qu'une réfraction; mais comme il y en a deux :

Il eſt évident auſſi par la remarque du problême précédent, que dans la ſeconde réfraction HLM, ou KHL eſt double de l'angle de réfraction KLM, par conſéquent la ligne KL eſt double de la ligne KH. Et parce que la ligne KL eſt preſque egale à la ligne KB, lorſque la lentille BI eſt fort mince, comme nous la ſuppoſons ici, cette ligne KB eſt auſſi preſque double de la ligne KH; par conſéquent toute la ligne BH eſt à peu près triple de la ligne KH. Mais nous avons reconnu que la même ligne BH eſt auſſi triple du

demi-diametre BE; il s'enſuit donc que ce demi-diametre BE eſt égal à la ligne KH, & par conſéquent la ligne KB eſt double du demi-diametre BE, ou égale à tout le demi-diametre. Si donc on porte le demi-diametre EB depuis le centre E en K, ce point K ſera le foyer qu'on cherche.

PROBLEME XXXI.

Trouver le foyer des lentilles de verre convexes des deux côtés.

Pl. 24, fig. 76.

POur trouver le foyer de la lentille de verre ABCD, dont l'axe EI paſſe par le centre E de la convexité ADC, & par le centre F de la convexité ABC, tirez un rayon quelconque d'incidence GH parallele à l'axe EI, & ayant pris ſur cet axe la ligne BI triple du demi-diametre BF, menez la droite HI, qui donnera le point K de la ſeconde réfraction. Par ce point K tirez du centre E la droite EKM, qui ſera perpendiculaire à la ſurface rompante ADC. La ligne IK étant conſidérée comme un rayon d'incidence, l'angle IKM ſera un angle d'inclinaiſon, lequel eſt double de l'angle de réfraction, comme il a été remarqué au problême précédent : ſi donc on fait en K l'angle IKL égal à la moitié de l'angle IKM, on aura en L le foyer qu'on cherche, à l'égard de la convexité ABC expoſée au ſoleil.

REMARQUE.

Lorſque les demi-diametres ED, BF, ſeront égaux entre eux, c'eſt-à-dire, lorſque les convexités ABC, ADC, ſeront des portions égales de

la ſuperficie d'une même ſphere, le foyer ſe trouvera à peu près au centre F de la convexité ABC expoſée au ſoleil, ou au centre E de la convexité ADC tournée vers le ſoleil. Mais ſoit que les demi-diametres ED, BF, ſoient égaux ou inégaux, la diſtance du foyer L ſera toujours la même, en tournant vers le ſoleil celle qu'on voudra des deux convexités ABC, ADC.

PROBLEME XXXII.

Trouver le foyer des lentilles de verre convexes d'un côté & concaves de l'autre.

I.

Pl. 24, fig. 77.

LE foyer d'une ſemblable lentille ſe trouve comme dans la précédente, lorſque ſa convexité regarde le ſoleil. Mais il y a une méthode abrégée pour le trouver, quand le diametre de la concavité eſt triple de celui de la convexité. Alors le foyer ſe trouve éloigné d'un diametre & demi, ou de trois demi-diametres, de la convexité, que nous ſuppoſons tournée vers le ſoleil, c'eſt-à-dire, qu'il eſt au centre de la concavité, en conſidérant l'épaiſſeur de la lentille comme très-petite.

Propoſons la lentille de verre ABCD, telle que le demi-diametre EB de la convexité ABC, qui eſt expoſée au ſoleil, ſoit la troiſieme partie du demi-diametre FD de la concavité ADC. Cela étant, je dis que tous les rayons d'incidence paralleles à l'axe BF, comme GH, s'uniront par réfraction au centre F de la concavité ADC : car ce rayon GH traverſant le verre, ſe briſera par la droite HI, qui étant continuée paſſeroit par le point F, éloigné de la convexité ABC de trois

demi-diametres, comme on l'a vu auparavant. Mais ce rayon de réfraction HF, se trouvant perpendiculaire à la surface concave ADC, ne se brisera point en I, lorsqu'il sortira du verre ; il continuera directement vers le point F, lequel par conséquent sera le foyer qu'on cherche.

I.

Pl. 24, fig. 78.

Mais si l'on tourne la concavité vers le soleil, le foyer se trouvera de même que dans les articles précédens. On pourra aussi le trouver par une méthode plus courte, lorsque le demi-diametre AB de la concavité sera la troisieme partie du demi-diametre CD de la convexité. Dans ce cas, le foyer se trouvera au centre C de la convexité, lorsque l'épaisseur BD de la lentille ne sera pas considérable ; ce qu'il faut toujours supposer, comme on le connoîtra par un raisonnement semblable au précédent. Mais on ne peut tirer aucune utilité d'une telle lentille exposée au soleil, puisque ses rayons de réfraction s'écartent, au lieu de s'unir. Ainsi le point C n'est appellé foyer qu'improprement, parce que les rayons de réfraction ne peuvent pas s'assembler en ce point, qui est du côté du soleil ; mais ils s'écartent par des lignes qui tendent à se réunir en ce point.

REMARQUES.

I.

Ce foyer C, qui ne peut servir à produire du feu, est appellé *foyer virtuel*, pour le distinguer du *foyer véritable*, où les rayons du soleil s'unissant par réfraction, peuvent produire du feu.

On peut trouver ce foyer véritable par cette

analogie, qui ſuppoſe que l'épaiſſeur de la lentille, dont la convexité regarde le ſoleil, eſt très-petite.

Comme la différence des demi-diametres de la concavité & de la convexité,
Au demi-diametre de la convexité;
Ainſi le diametre de la concavité,
A la diſtance du foyer à la lentille.

II.

Dans une lentille convexe des deux côtés, le foyer, qui eſt toujours véritable, ſe peut trouver par cette analogie, qui, comme la précédente, ſuppoſe que l'épaiſſeur de la lentille eſt très-petite.

Comme la ſomme des demi-diametres des deux convexités,
Au demi-diametre de l'une des convexités;
Ainſi le diametre de l'autre convexité,
A la diſtance du foyer à la lentille.

III.

Cette analogie ſervira auſſi à trouver le foyer d'une lentille concave des deux côtés; mais comme ce foyer n'eſt que virtuel dans cette eſpece de lentilles, auſſi-bien que dans celles qui ſont plates d'un côté & concaves de l'autre, nous n'en parlerons pas davantage.

IV.

Si l'on fait une lentille de verre ABCG, concave d'un côté, & convexe de l'autre, en ſorte que la convexité ABC ſoit la ſurface d'une portion de ſphéroïde produit par la circonvolution

Pl. 24, fig. 79.

Pl. 24, fig. 79.

de l'ellipſe ABCD, autour de ſon grand axe BD, qui ſoit à la diſtance EF des deux foyers E, F de l'ellipſe, comme 3 eſt à 2, & dont la concavité AGC ait pour centre le foyer E; en expoſant cette lentille aux rayons du ſoleil, en ſorte que ſa convexité ABC regarde directement le ſoleil, tous les rayons d'incidence qui ſeront paralleles au grand axe BD, s'uniront par réfraction au foyer E, lequel par conſéquent ſera le foyer véritable de cette lentille ſphérico-elliptique. Sa convexité ſe peut auſſi faire hyperbolique; mais cela eſt trop ſpéculatif pour des récréations mathématiques. Voyez la dioptrique du Pere Deſchales.

V.

Ce ſeroit ici le lieu de parler des grands verres ardens de M. Tſchirnaus, & principalement de celui que ce gentilhomme Saxon a vendu à M. le duc d'Orléans; mais il trouvera ſa place dans les problêmes de phyſique, où l'on aura encore occaſion de parler des lentilles & de leurs effets. On ajoutera cependant quelques effets de ces verres, dont il eſt fait mention dans les actes des ſavans, de l'année 1697, page 415 & ſuivantes. Le bois le plus dur, humecté même d'eau, mis à leur foyer, prend feu en un moment; l'eau bout auſſi-tôt qu'elle y eſt préſentée, pourvu qu'elle ſoit contenue dans un petit vaſe; les métaux ſe fondent; les briques, la pierre de ponce, la porcelaine d'Hollande & l'asbeſte ſe changent en verre; le ſouffre, la colophone, la poix & les autres matieres de même nature, ſe liquéfient en eau; les charbons & les cendres ſe vitrifient: en un mot, tout ce qu'on préſente au foyer de ces verres ardens ſe fond, ou ſe change en chaux, ou s'évapore dans l'air.

Comme ces lentilles sont fort grandes, on a soin, pour faire ces expériences, d'ajouter une petite lentille vers le foyer de la grande, afin de rassembler en un espace plus proche les rayons rompus.

PROBLEME XXXIII.

Représenter dans une chambre fermée les objets de dehors avec leurs couleurs naturelles, par le moyen d'une lentille de verre convexe des deux côtés.

AYant fermé la porte & les fenêtres de la chambre, en sorte que toutes les avenues soient bouchées à la lumiere, excepté un petit trou que l'on fera à une fenêtre qui reponde sur quelque place fréquentée, ou sur quelque beau jardin, si cela se peut; appliquez à ce trou une lentille de verre convexe des deux côtés, qui ait fort peu d'épaisseur, afin que son foyer soit plus éloigné, comme un verre des lunettes dont se servent les vieillards. Alors les images des objets de dehors, qui passeront au travers de ce verre, étant reçues sur un linge blanc tendu à plomb, ou sur un carton bien blanc placé au foyer du même verre, y paroîtront avec leurs couleurs naturelles, & même plus vives que le naturel, sur-tout lorsque le soleil les éclairera. Il ne faut point que le verre soit exposé au soleil, parce que la trop grande lumiere frappant le verre empêcheroit de discerner avec plaisir les images des objets extérieurs, qui sans cela s'y distingueront d'une telle maniere avec leurs mouvemens, que l'on pourra sans peine discerner les hommes d'avec les animaux qui passe-

ront, & même un homme d'avec une femme, remarquer les oiseaux qui voleront en l'air & connoître s'il y a du vent par le tremblement des herbes ou des feuilles des arbres, qui se rendra sensible sur le linge ou sur le carton.

REMARQUES.

I.

On peut aussi sans verre distinguer sur une muraille de la chambre, ou sur le plancher, les images des objets extérieurs, & principalement de ceux qui sont en mouvement; mais ces images ne paroissent pas avec tant d'agrément & de distinction, parce que leurs couleurs ne sont que sombres & mortes. Or de quelque maniere qu'on les voie, elles paroîtront toujours renversées; mais on les peut redresser en plusieurs manieres: ce qui ne sert pourtant de rien, parce que cela n'augmente pas le plaisir qu'il y a de les voir avec un verre dans leurs couleurs naturelles, & ne diminue en rien l'usage qu'on en tire, qui est que l'on peut représenter en raccourci sur le carton les paysages, & tout ce qui pourra envoyer son image sur ce carton. Ce qui se fera en passant un crayon sur tous les traits de cette représentation, qui paroîtra comme en perspective, dont les parties seront d'autant mieux proportionnées, que la lentille de verre sera moins épaisse par le milieu, & que le trou par où les especes passent pour entrer dans le verre, sera petit. Ce trou ne doit pas avoir une épaisseur considérable; c'est pourquoi il doit être fait dans une platine de métal bien mince, qu'on appliquera contre le trou de la fenêtre, qu'il est bon de faire un peu grand, afin de don-

ner un passage libre aux especes ou images des objets de dehors, qui seront de côté.

II.

On peut aussi voir dans une chambre dont les fenêtres seront fermées, pourvu que la porte soit ouverte, ce qui se passe au dehors par le moyen de plusieurs miroirs plans, qui pourront se communiquer par réflexion les especes l'une à l'autre, &c.

III.

J'ai oublié de dire que, par cette maniere de représenter sur une surface les images des objets avec une lentille de verre, les physiciens expliquent comment se fait la vue, en prenant le creux de l'œil pour la chambre fermée, le fond de l'œil ou la rétine pour la surface qui reçoit les especes, le cristallin pour la lentille de verre, & le trou de la prunelle pour le trou de la fenêtre par où passent les especes ou images des objets.

IV.

L'œil artificiel représente beaucoup mieux l'œil naturel que cette chambre fermée. On va le décrire tel qu'il se trouve dans les *expériences physiques* * *de M. Poliniere*, qui nous a communiqué dans ce livre ses découvertes sur la physique, avec plusieurs autres, qu'il a rendu fort claires, tant par l'exposition des expériences, que par leur explication.

* Page 472, seconde édition.

AB est une boule de bois creuse, qu'on peut séparer en deux parties en DE; son diametre est d'environ 5 à 6 pouces. En BC est un verre len-

Pl. 23, fig. 12.

ticulaire, dont le foyer en eſt éloigné de 5 pouces ou environ. FA eſt un tuyau collé à la boule AB en AH : ce tuyau eſt de 8 à 9 pouces de long, & il a 2 pouces & demi de diametre. GA eſt un tuyau qui entre dans l'autre FA, & qui porte à ſon extrêmité AH un papier huilé, ou un verre plan, qui a été un peu dépoli en le frottant ſur une ſurface plane avec du ſable broyé. Ce verre eſt appliqué au bout du tuyau mobile GA, pour être facilement placé au foyer du verre CB.

Si l'œil eſt placé vers G pour regarder le verre AH, en repouſſant un peu, ou en retirant le tuyau G, il appercevra diſtinctement les objets extérieurs peints ſur le verre AH dans une ſituation renverſée.

On voit que dans cet œil artificiel la lentille BC tient la place des humeurs de l'œil, & le verre bruni ou papier huilé AH, celle de la rétine, que l'on croit vraiſemblablement tranſmettre au cerveau les images qui y ſont peintes.

V.

Pour bien voir ces images dans l'œil naturel, il faut ſéparer un œil de mouton des chairs & peaux dont il eſt entouré, & couper un peu du fond de cet œil, pour découvrir l'humeur vitrée. Alors y ayant mis un petit morceau de papier huilé, & ayant placé le devant de cet œil à une petite ouverture de fenêtre d'une chambre fermée, l'image des objets éclairés paroît ſur ce papier dans une ſituation renverſée. Cet œil étant de même expoſé vis-à-vis d'une bougie allumée, l'image de la flamme paroît renverſée ſur ce papier ; les objets proches ſont mieux repréſentés que les objets éloignés.

L'œil de mouton eſt préférable à celui de bœuf,

ou de veau, parce que la prunelle des moutons ou des brebis ne se ferme pas tant en mourant que celle des bœufs.

PROBLEME XXXIV.

Construire une chambre obscure qu'on puisse transporter.

FAites une caisse de bois ABCD, à laquelle vous donnerez environ 9 pouces de largeur, & 2 ou trois pieds de longueur, plus ou moins, selon la distance des foyers des lentilles dont vous voulez vous servir. Ajustez à l'un des côtés un tuyau EF, ou plusieurs qui s'emboîtant l'un dans l'autre, puissent s'allonger ou se r'accourcir, selon le besoin : vous appliquerez dans ce tuyau deux, ou même trois lentilles convexes des deux côtés. Les foyers des lentilles extérieures auront environ 7 pouces de distance, & celui de la lentille intérieure aura environ 5 pouces. Vous attacherez un papier huilé GH, qui sera suspendu perpendiculairement à travers la caisse dans le lieu où l'on jugera que se doivent peindre les images des objets, dont les rayons auront été rompus dans les verres lenticulaires du tuyau. Enfin ménagez au côté opposé au tuyau une ouverture en I, qui soit assez grande pour recevoir les deux yeux. La caisse doit être bien fermée de tous côtés.

Pl. 23, fig. 13.

Quand vous voudrez voir quelques objets, vous tournerez le tuyau garni de ses lentilles vers ces objets, & vous les ajusterez de maniere que l'image en soit peinte clairement sur le papier huilé. Ce que vous reconnoîtrez en regardant par l'ouverture I. Pour mieux voir, il est bon de s'en-

velopper la tête & l'ouverture, afin qu'il n'y entre point de lumiere par cette ouverture. Les objets paroîtront représentés avec toutes leurs couleurs, de même que dans la chambre fermée qu'on a décrite dans le problême précédent.

REMARQUES.

I.

Wolfius rapporte dans sa dioptrique, une autre construction de chambre obscure, pour redresser les images des objets qu'on voit dans une situation renversée. Si l'on veut voir quelque chose de singulier en ce genre, il faut consulter les expériences physiques citées ci-dessus, dans les expériences 101 & 103 de la seconde édition.

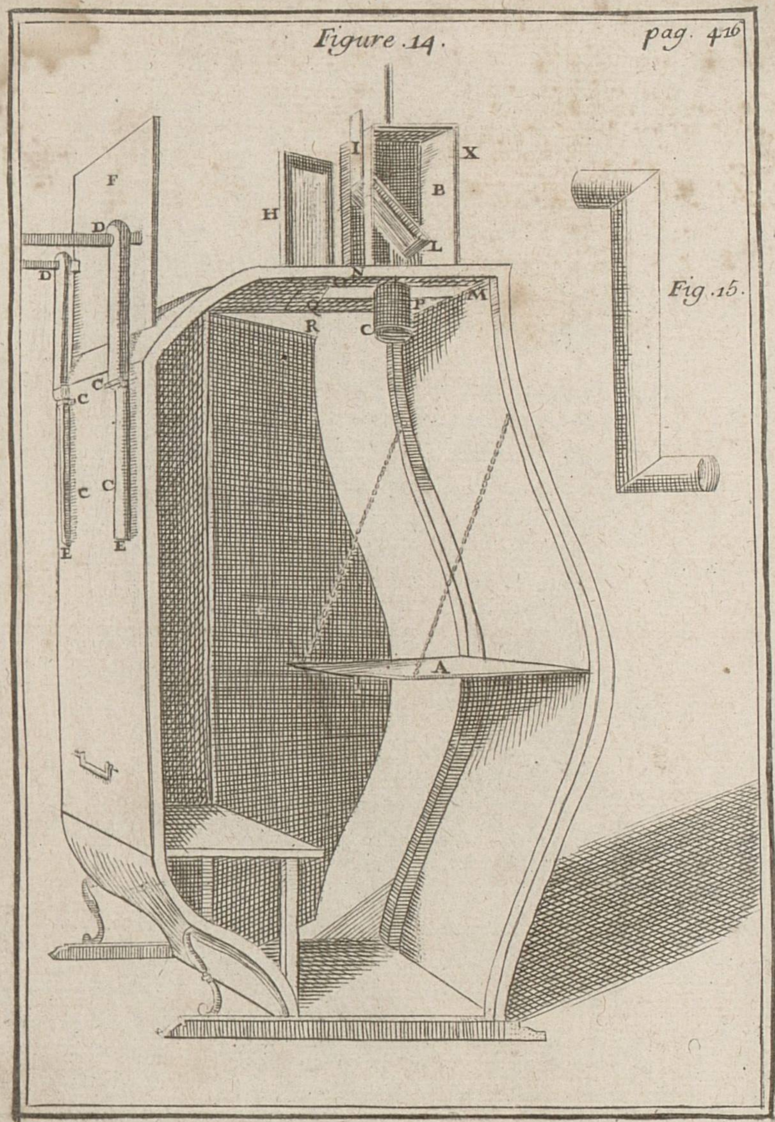
II.

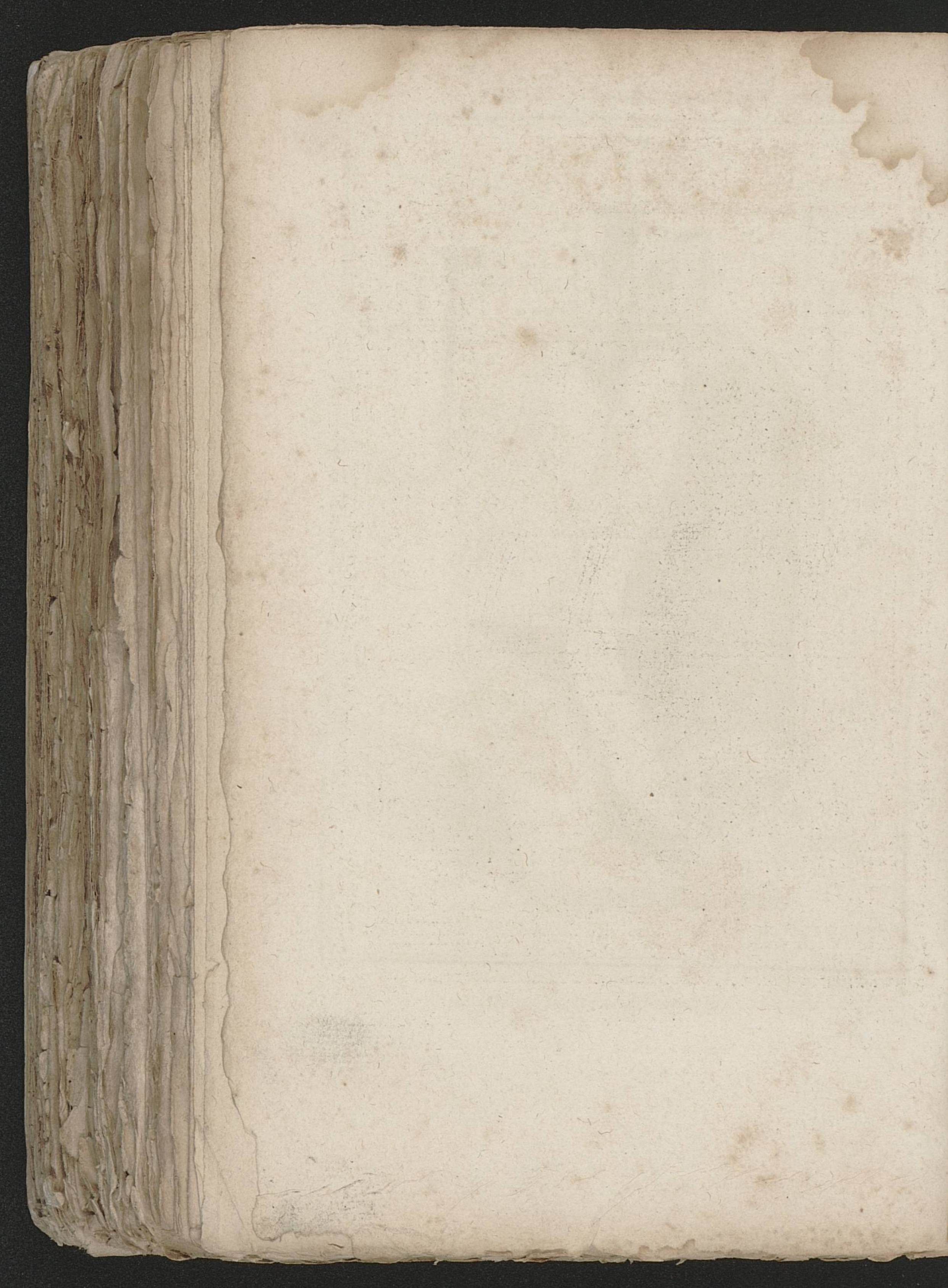
Mais on augmentera la multiplicité des objets, si on ajuste à la place du premier verre lenticulaire un verre à facettes, pour recevoir les rayons des objets, & qu'on mette à son foyer un autre verre convexe dans le tuyau de la chambre obscure. Ces verres à facettes sont une curiosité d'optique dont on parlera dans le problême suivant.

III.

Voici la description d'une autre chambre obscure, inventée par G. J. s'Gravesande, qui l'a donné à la suite de son essai de perspective.

Pl. 25, fig. 14. Cette machine a la forme à peu près d'une chaise à porteur. Le dessus en est arrondi vers le derriere, par le devant elle est faite en talus jusqu'à la moitié de sa hauteur. Voyez la figure


Figure. 14.
pag. 416
F
D
D
C
C
C
C
E
E
I
X
B
H
L
N
O
Q
P
M
R
C
A
Fig. 15.



re qui représente cette machine, dont le côté opposé à la porte est supposé enlevé, pour qu'on en puisse voir le dedans. Pl, 25, fig. 14.

1. Au dedans, la planche A sert de table; elle tourne sur deux chevilles de fer qui entrent dans les bois qui forment le devant de la machine. Cette table est soutenue par deux chainettes; de sorte qu'on peut la soulever pour entrer plus commodément par la porte qui est de côté.

2. De part & d'autre, il y a vers le derriere de la machine un tuyau de fer blanc recourbé vers les deux bouts, comme on le voit dans la figure 15. Ce tuyau se place dans la garniture qui est au dedans, & il a une de ses extrêmités, qui donne dans la machine, & une qui aboutit au dehors: il sert à donner de l'air, sans que la lumiere y puisse passer. On peut avoir plusieurs de ces tuyaux, & les ajuster à la chaise, si on en a besoin pour donner plus d'air. Fig. 15.

3. Au derriere de la machine en dehors sont attachés quatre petits fers *c*, *c*, *c*, *c*, dans lesquels glissent deux regles de bois DE, DE, lesquelles sont de la largeur d'environ trois pouces. Au travers de ces deux regles, passent vers DD deux lattes qui tiennent attachée une planche F, laquelle par leur moyen on peut faire avancer & reculer. Fig. 14.

4. Au dessus de la machine, il y a une planche longue d'environ quinze pouces, & large de neuf, dans laquelle il y a une échancrure PMOQ, longue de neuf ou dix pouces, & large de quatre.

5. On attache sur cette planche deux regles faites en forme de queue d'aronde, entre lesquelles on fait glisser une autre planche de même longueur que la premiere, & large d'environ six pouces. Cette seconde planche est percée par le milieu,

Pl. 25. fig. 14. & dans cette ouverture, qui doit avoir trois pouces de diametre, on fait un écrou, qui sert à élever & à abaisser un cilindre, sur lequel il y a une vis, & dont la hauteur est d'environ quatre pouces. C'est dans ce cilindre, comme on le verra dans la suite, qu'est placé le verre convexe.

6. On fait glisser au-dessus de la planche dont on a parlé N°. 4, une boîte X, en forme de petite tour quarrée, large d'environ sept ou huit pouces, & haute de dix; le côté B, qui lui sert de porte, est tourné vers le devant de la machine. Le derriere de cette boîte a vers le bas une ouverture quarrée N, d'environ quatre pouces, laquelle peut se fermer par une petite planche I, qui glisse entre deux regles.

7. Au-dessus de cette ouverture quarrée il y a une fente parallele à l'horison, & qui tient toute la largeur de la boîte : par cette fente on fait entrer dans la boîte un petit miroir, qui des deux côtés glisse entre deux regles placées de telle maniere, que la glace du miroir, qui est tournée vers la porte B, fait avec l'horison un angle de cent douze degrés & demi.

8. Ce miroir, sur le milieu du côté qui reste hors de la boîte, a une petite platine de fer qui tient lieu de base à une petite vis, laquelle avance & sert à arrêter le miroir dans l'endroit où on le voit en H. Pour le fixer ainsi, on fait passer la vis dans un petit trou qu'on fait dans la planche dont il est parlé N°. 5, & par une fente qu'on fait pour cet effet dans la planche qui est au-dessous de celle-là, & dont on a parlé N°. 4. Ce miroir se tourne verticalement de tous côtés, & on l'arrête par le moyen d'un écrou R. Quand on ôte le miroir de cette situation, la fente dont on vient de par-

ler, ſe ferme par une petite planche, qui au dedans de la machine gliſſe entre deux petites régles. Quant à la fente dont il eſt parlé N°. 7, elle ſe ferme en partie par la planche I, quand on ouvre l'ouverture N, & les deux bouts, qui reſtent ouverts, ſe ferment par de petites regles.

9. A un des côtés de la boîte, on fait gliſſer une regle dans deux petits fers, pareils à ceux qui ſont au derriere de la machine N°. 3. Cette regle paſſe de quelques pouces le derriere de la boîte, & à ſon extrêmité elle a un trou par où l'on fait paſſer la vis du miroir dont je viens de parler; de ſorte qu'on peut incliner ce miroir ſous toutes ſortes d'angles au devant de l'ouverture N.

10. Outre ce premier miroir, il y en a un autre marqué L, qui eſt plus petit : il eſt attaché vers ſon milieu à une latte qui paſſe par le milieu du haut de la boîte. Cette latte peut s'arrêter à vis, & elle ſert à élever & à abaiſſer le miroir qui lui eſt attaché de maniere à pouvoir être fixé à toutes ſortes d'inclinaiſons.

REMARQUE.

Ceux qui croiront que les tuyaux dont il eſt parlé N°. 2, ne ſuffiſent point pour donner de l'air à la machine, pourront mettre ſous le ſiege un petit ſoufflet, qu'on fera agir par le moyen du pied. De cette maniere on renouvellera continuellement l'air de la machine, le ſoufflet chaſſant celui qui y eſt, & obligeant ainſi celui de dehors d'entrer par les tuyaux.

Usages de la machine qu'on vient de décrire.

I.

Représenter les objets dans leur situation naturelle.

Pl. 25. fig. 14.

QUand on veut représenter les objets dans cette machine on étend un papier sur la table; ou bien, ce qui est mieux, on étend le papier sur une autre planche, en sorte qu'il déborde, & on insere cette planche ainsi couverte dans un cadre, de maniere qu'elle soit fixée par le moyen de deux regles faites en forme de queue d'aronde.

On met dans le cilindre C, qui tourne à vis dans le haut de la machine, un verre convexe, dont le foyer est à une distance à peu près égale à la hauteur de la machine au-dessus de la table : on ouvre par derriere la boîte qui est au-dessus de la machine, & on incline vers cette ouverture le miroir L; en sorte qu'il fasse avec l'horison un angle demi-droit, quand on veut représenter les objets pour le tableau perpendiculaire. Alors si on ôte le miroir H, & la planche F, aussi-bien que les regles DE, DE, on verra se placer sur le papier tous les objets qui envoyent sur le miroir L des rayons qui peuvent être réfléchis sur le verre convexe, lequel on éleve ou l'on abbaisse par le moyen de la vis du cilindre, jusqu'à ce que les objets paroissent entierement distincts.

Quand on veut représenter ces mêmes objets pour le tableau incliné, on doit donner au miroir la moitié de l'inclinaison qu'on veut donner au tableau.

Pour le tableau parallele, il faut fermer l'ouverture N, & ouvrir la porte B; après quoi il faut

élever le miroir L jusqu'au haut de la boîte, en le mettant dans une situation parallele à l'horison. Cette disposition de la machine peut servir quand on est sur un balcon, ou à quelque étage élevé, à dessiner un parterre qui seroit au bas.

Si on vouloit dessiner une statue qui seroit dans un lieu un peu élevé, & qu'on voulût la représenter de la maniere qu'il faudroit la peindre contre un plafond, il faudroit tourner le derriere de la machine vers la statue, & tourner aussi la boîte en sorte que la porte B regardât la statue. Alors après avoir ouvert la porte, il faudroit mettre le miroir L verticalement, la glace tournée vers la statue, & avancer ou reculer la boîte, ou bien élever ou abaisser le miroir, jusqu'à ce que les rayons qui viennent de la statue sur le miroir, puissent être réfléchis sur le verre. Quand ces changemens de la boîte ou du miroir ne suffisent pas pour donner cette réflexion sur le verre, il faut avancer ou reculer la machine entiere.

II.

Représenter les objets en faisant paroître à droite ce qui doit être à gauche.

AYant mis la boîte X dans la situation qu'on voit dans la figure, il faut ouvrir la porte B, & fermer l'ouverture N ; puis mettant le miroir H dans la disposition qui a été dite, N°. 7, élevez le miroir L vers le haut de la boîte, & inclinez le vers le premier miroir, en sorte qu'il fasse avec l'horison un angle de 22 degrés & demi ; c'est-à-dire, que le dessus de la machine, après une double réflexion, paroisse vertical dans le premier miroir.

Pl. 25, fig. 14. Pour le tableau incliné, il faut que le miroir L fasse avec l'horison un angle égal à la moitié de l'angle de l'inclinaison du tableau, moins le quart d'un angle droit. On trouve cet angle avec assez de précision pour la pratique, en inclinant le miroir L jusqu'à ce que l'apparence du dessus de la machine, après une double réflexion, paroisse dans l'autre miroir sous un angle avec l'horison, égale à l'inclinaison qu'on veut donner au tableau. Si l'inclinaison du tableau étoit moindre que du quart de 90 degrés, il ne faudroit pas incliner le miroir L vers le premier, comme il vient d'être dit ci-dessus, mais du côté opposé, en faisant l'angle de l'inclinaison du miroir égal à la différence de l'angle de l'inclinaison du tableau, au quart de 90 degrés.

Quand on veut représenter les objets pour le tableau parallele, il faut mettre le miroir L dans la disposition qui a été dite, article I, de l'usage, & le miroir H dans celle qui a été dite au N°. 9, en l'inclinant vers l'horison sous un agle demi-droit la glace tournée vers la terre, quand on suppose le tableau au-dessous de l'œil, & vers le ciel, quand on le suppose au-dessus.

Cette disposition de la machine peut aussi être d'usage pour les tableaux inclinés, qui font avec l'horison un angle fort petit : mais alors il faut diminuer l'inclinaison d'un des miroirs, de la moitié de l'inclinaison du tableau.



III.

Pl. 25. fig. 14.

Représenter tour à tour les objets qui ſont aux environs d'une campagne ou d'un jardin, au milieu duquel on a placé la machine, & faire paroître ces objets redreſſés devant celui qui eſt aſſis dans la machine.

IL faut tourner le dos de la machine vers le ſoleil, parce que les objets qui ſont derriere la machine, ſe répréſentant par une ſeule réflexion, leur apparence ſera toujours plus claire, bien qu'ils ſoient dans l'ombre, que celle des objets placés aux autres côtés, & qui ne peuvent être vus que par une double réflexion.

Les objets qui ſont aux deux côtés de la machine, ſe repréſentent par le moyen du miroir H, ſitué comme on le voit dans la figure N, & 8. On couvre ce miroir d'une tour ou boîte de carton, ouverte du côté des objets, comme auſſi du côté de l'ouverture N de la boîte X : on doit uſer de cette précaution ; car ſi on laiſſe le miroir entierement expoſé, il réfléchira ſur le miroir L les rayons de lumiere qui viennent de côté, leſquels entrant par le verre convexe, après avoir été réfléchis par le miroir L, affoibliront extrêmement la repréſentation.

Les objets qui ſont au-devant de la machine, ſe répréſentent comme il a été dit au commencement de l'article II.

IV.

Repréſenter des tableaux ou des tailles-douces.

LEs tableaux & les tailles-douces qu'on veut repréſenter, s'attachent contre la planche F, du côté qui regarde le derriere de la machine,

Pl. 25, fig. 14. que l'on tourne en ſorte que ces tailles-douces ſoient expoſées au ſoleil. Dans cette ſituation on les repréſente comme les autres objets (art. I.) avec cette ſeule différence, qu'il faut changer le verre convexe, qui eſt dans le cilindre C : car ſi on ſe propoſe de donner aux tailles-douces leur véritable grandeur, il faut que la diſtance du foyer à ce verre ſoit égale à la moitié de la hauteur de la machine au-deſſus de la table, c'eſt-à-dire, à la moitié de AC. Si on vouloit dans le deſſein donner à ces mêmes figures plus de grandeur qu'elles n'en ont véritablement, il faudroit que la diſtance du foyer à ſon verre fût encore plus petite; & il faudroit au contraire qu'elle fût plus grande, ſi on vouloit repréſenter les figures plus petites qu'elles ne ſont. L'éloignement dans lequel il faut mettre les tailles-douces, ſe trouve en avançant ou en reculant la planche F, juſqu'à ce qu'elles paroiſſent diſtinctement dans la machine. On peut déterminer cet éloignement par la propoſition ſuivante.

La hauteur de la machine au-deſſus de la table,
moins la diſtance du foyer au verre eſt à
La hauteur de la machine au-deſſus de la table,
comme *la diſtance du foyer au verre*, eſt à
La diſtance du verre à la figure.

Remarquez que cette diſtance du verre à la figure, ſe meſure par un rayon réfléchi, qui part de la figure parallelement à l'horiſon, & qui eſt réfléchi par le miroir perpendiculairement ſur le verre. Remarquez encore que quand on veut éloigner les figures au-delà du derriere de la machine, il faut les attacher contre le côté F de la planche, & la tourner en faiſant paſſer ſes lattes par les regles

DE, DE, de maniere que la face F regarde l'ouverture N.

REMARQUE I.

Sur la représentation des visages.

Il seroit assurément très-curieux & très-utile de pouvoir dessiner les visages des hommes au naturel. La chose réussit fort bien en petit, quand même l'apparence de la personne entiere n'occuperoit pas un demi-pouce sur le papier, mais il y a plus de difficulté à réussir en grand.

REMARQUE II.

Sur l'ouverture du verre convexe.

Dans tout ce qui vient d'être dit, il ne faut pas négliger d'examiner l'ouverture qu'on doit donner au verre convexe ; car bien qu'on ne puisse pas réduire cette ouverture à une mesure fixe, il sera bon toujours de faire attention aux remarques suivantes. 1. Qu'on peut ordinairement donner au verre la même ouverture qu'on donneroit à une lunette d'approche, dont ce verre seroit l'objectif. 2. Qu'il faut diminuer cette ouverture, quand les objets sont fort éclairés ; qu'il la faut augmenter, quand au contraire ils sont exposés à un jour plus foible. 3. Que les traits paroissent mieux marqués avec une petite ouverture qu'avec une plus grande ; & qu'ainsi lorsqu'on veut dessiner, il faut donner au verre le moins d'ouverture qu'il sera possible ; avec cette précaution pourtant, qu'il ne faut pas trop exténuer la lumiere qui entre par-là dans la machine.

On voit par toutes ces remarques, qu'il est bon d'avoir plusieurs pieces de fer blanc, ou de

Pl. 25. fig. 14.

cuivre mince, qui ſoient rondes, de la grandeur du verre, & percées différemment, afin de pouvoir ainſi donner au verre l'ouverture dont on a beſoin. On pourroit encore faire différentes ouvertures dans une lame de cuivre, qu'on feroit gliſſer ſur le verre; ou ſe ſervir d'une plaque ronde, qui tournant ſur ſon centre, feroit paſſer ſur le verre des trous de différentes grandeurs.

REMARQUE III.

On trouvera dans l'eſſai de perſpective, qu'on a cité, les démonſtrations de tous ces uſages, & la deſcription d'une autre machine, qui a des avantages particuliers, mais qui cependant n'eſt point préférable à celle qu'on a décrite ici.

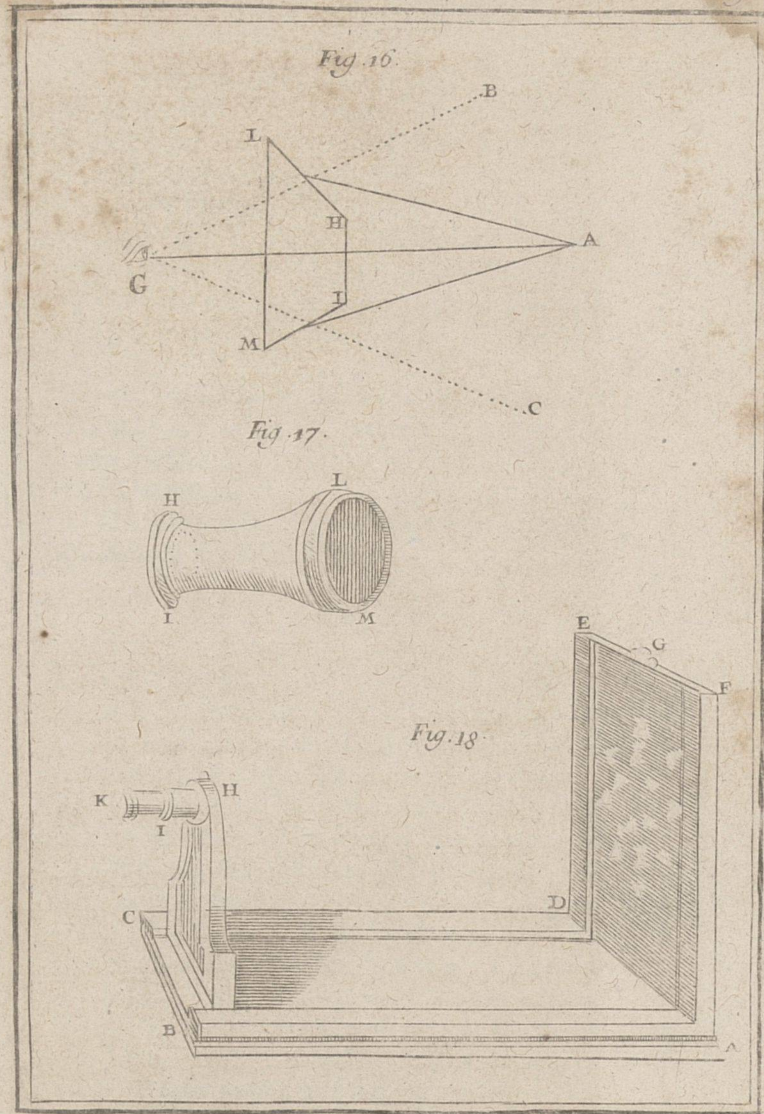
PROBLEME XXXV.

Des verres à facettes.

Pl. 26. fig. 16.

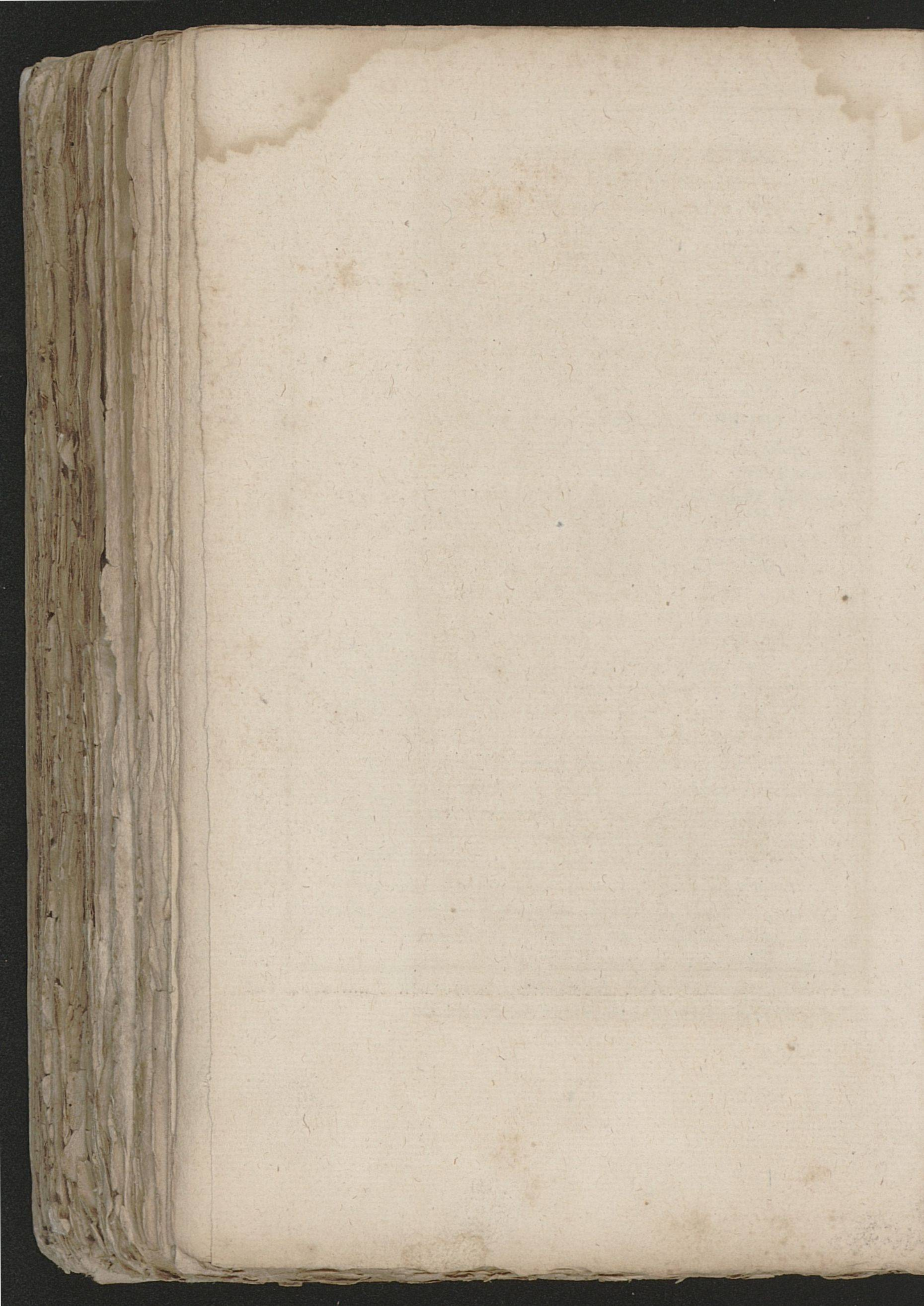
LEs verres à facettes ſont des verres taillés à pluſieurs faces, tels que le verre LHIM, dont on n'a repréſenté ici que trois faces LH, HI, IM. Ces verres repréſentent autant de fois le même objet qu'ils ont de facettes; en ſorte que ſi un verre a 41 facettes, & qu'on regarde un ſoldat armé, en mettant l'œil dans le point où les rayons de l'objet qui ſe ſont briſés en paſſant dans les 41 faces, ſe croiſent, on voit une compagnie de 41 ſoldats, quoiqu'il n'y en ait qu'un.

C'eſt ce qu'on peut remarquer en jettant les yeux ſur la figure qui repréſente la coupe de trois faces. L'objet A envoie ſes rayons ſur les trois faces LH, IH, IM. Ces faces ſont tellement taillées, que ces rayons s'étant rompus en paſſant



To. I. Pl. 26

N°



par le verre, ils vont ſe croiſer au point G, où l'œil étant placé, il appercevra l'objet A en A, en B & en C, par les trois rayons directs GA, GB, GC : car on a coutume de rapporter dans la ligne droite, qui vient en dernier lieu frapper l'organe de la vue, les objets apperçus, quoique les rayons qui paſſent de ces objets ayent ſouffert pluſieurs détours, comme on le voit aſſez par les miroirs plans.

On peut enchâſſer un de ces verres à facettes à l'extrêmité d'un tuyau, & placer à l'autre extrêmité une lentille dans l'endroit où tous les rayons du verre à facettes ſe croiſent, & que j'ai appellé ſon foyer. On a repréſenté un de ces verres ainſi enchâſſés dans la figure HLIM.

Pl. 26. fig. 17.

REMARQUE.

Si on préſente un verre à facettes aux rayons du ſoleil, & qu'on le mette à la ſeule ouverture qu'on aura laiſſé dans une chambre bien fermée, on verra repréſenter ſur un papier blanc, mis à une diſtance convenable, autant d'images du ſoleil qu'il y aura de facettes au verre : & ces images ſeront d'autant plus vives que la chambre ſera plus obſcure.

Mais on verra quelque choſe d'agréable, ſi après avoir mis à l'ouverturte de la chambre obſcure un priſme triangulaire, on fait paſſer par un grand verre à facettes les différentes couleurs des rayons du ſoleil, produites par le priſme, & qu'on les reçoive ſur un papier blanc. On variera encore ces couleurs en leur préſentant des verres lenticulaires, & en les faiſant enſuite paſſer par un verre à facettes. On remarquera ſans aucune confuſion

dans le foyer du verre à facettes, les couleurs les plus belles & les plus brillantes qu'on puisse voir.

PROBLEME XXXVI.

Construire un tableau magique.

Pl. 26, fig. 18.

C'Est avec un verre à facettes qu'on fait voir une figure très-bien faite, quoiqu'elle soit tout-à-fait difforme sur le tableau où elle est peinte. Pour construire ces sortes de tableaux, qu'on appelle *magiques*, on élevera à plomb sur une table ABCD une autre table ou planche ADEF : on fera sur ces deux tables des rainures, suivant leur longueur ; les rainures AB & CD de la table horisontale serviront à éloigner ou avancer le pied BCH, & les rainures AF, DE de la planche verticale, serviront à hausser ou baisser un carton sur lequel on collera un papier blanc. On ajustera au haut du pied BCH un tuyau KI dans un autre HI, le tuyau KI contiendra un verre à facettes, placé en I, & un carton en K, auquel on aura fait un petit trou vers le foyer du verre à facettes.

Cela étant ainsi disposé, on placera le pied BHC sur la table horisontale, dans un lieu convenable, & on l'éloignera plus ou moins de la planche verticale, selon qu'on voudra que les parties de la figure à dessiner sur le papier blanc du tambour, & qu'on veut rassembler par le verre à facetes, soient plus ou moins éloignées les unes des autres. Au petit trou K on placera une lampe (ce ne doit point être une chandelle) qui renvoyera de la lumiere sur le papier blanc appliqué à la planche verticale ADEF, & l'on marquera avec du crayon le contour de ces surfaces lumineuses.

Quand on aura examiné, en regardant par le trou K, si ces surfaces lumineuses paroissent faire une même superficie, on prendra dans chacune de ces superficies les parties d'un objet qui doivent se réunir toutes quand on les regardera par le verre à facettes, placé dans le tuyau KI. Et sur les espaces qui sont entre ces surfaces, on mettra telles figures grotesques qu'il plaira, pour faire paroître le tableau d'autant plus difforme. On peut aussi prendre dans ces espaces des figures qui composeront une même figure, en les considérant à la vue, avec celles qui seront représentées sur les surfaces lumineuses.

Ainsi lorsqu'on regardera par le trou K, on ne remarquera qu'une seule figure ou image composée de toutes les parties qui sont peintes sur les surfaces lumineuses, & l'on n'appercevra en aucune façon celles qui sont peintes dans les espaces qui sont au milieu. Voyez Wolfius dans sa dioptrique, & Niceron dans sa perspective curieuse.

PROBLEME XXXVII.

De la lanterne magique.

Pl. 27. fig. 19.

LA lanterne magique est une sorte de lanterne qui contient une lampe mise au foyer d'un verre convexe, ou d'un miroir concave, à laquelle on applique de petites figures peintes sur des verres renfermés dans un chassis de bois, qu'on fait passer devant la lampe. Ces figures se représentent d'une grandeur énorme sur une muraille ou un drap blanc, exposé à une certaine distance dans une chambre entiérement obscure.

On ne s'étendra pas ici davantage sur la descrip-

tion, ni ſur les effets de la lanterne magique, parce qu'on aura occaſion d'en parler dans les problêmes de phyſique.

PROBLEME XXXVIII.

Des lunettes d'approche ou téleſcopes.

ENtre les différentes machines d'optique, les lunettes d'approche ſont celles qui ſont d'un plus grand uſage. Elles ſont compoſées des verres dont on a parlé dans le problême XXX & ſuivans, & ſervent à faire paroître près les objets éloignés. Il y a pluſieurs ſortes de lunettes d'approche, 1°. à deux verres, dont l'un eſt convexe & l'autre concave, qui repréſentent les objets droits, comme on les voit naturellement. 2°. A deux verres convexes, qui repréſentent les objets renverſés. 3°. A quatre verres convexes, qui redreſſent les objets qui paroiſſent renverſés en les regardant avec deux verres convexes.

REMARQUES.

I.

Il eſt aiſé de faire une lunette d'aproche de la premiere ſorte, qu'on appelle *lunette d'Hollande* ou de *Galilée*. On prend un verre plan d'un côté, & convexe de l'autre, ou convexe des deux côtés, pourvu que la convexité ſoit faite avec une portion de grande ſphere : on ajuſte ce verre, qu'on nomme *objectif*, à l'extrêmité d'un tuyau de carton ou d'autre matiere, ſelon qu'on le trouvera meilleur : on emboîte dans ce tuyau un autre tuyau de même matiere, de ſorte que celui-ci puiſſe

rentrer dans le premier : on ajuste encore à l'extrêmité de ce second tuyau un autre verre concave des deux côtés. Enfin on place ce verre concave en coulant le tuyau dans lequel il est enchâssé, de maniere qu'on puisse voir distinctement les objets qu'on veut regarder. La concavité de ce verre, qu'on nomme *oculaire*, doit être faite avec la portion d'une petite sphere. Le verre concave sera placé entre le verre convexe & son foyer. Si un verre concave ne faisoit point paroître les objets assez clairement, on en chercheroit un autre jusqu'à ce qu'on en ait trouvé un qui les fît voir distinctement.

II.

Quand on a trouvé le point où l'on voit distinctement les objets assez éloignés, on fait une marque au tour du second tuyau avec de l'encre, à l'endroit où finit le premier, afin de le remettre au même endroit, lorsqu'on veut voir les mêmes objets. Mais il est à remarquer que cet endroit ne conviendra pas à toutes sortes de personnes pour voir le même objet, ni à la même personne pour regarder des objets inégalement éloignés. Il faut que chacun ajuste le second tuyau, qui contient l'oculaire, à la portée de sa vue.

III.

On aura une lunette d'approche fort claire & fort commode, d'un pied huit pouces de longueur ou environ, si on se sert d'un objectif convexe des deux côtés, qui ait quatre pieds de diametre, & d'un oculaire concave des deux côtés, qui ait quatre pieds & demi de diametre. Mais on fera un très-bon télescope avec un oculaire concave des deux côtés, dont le diametre soit de cinq pouces

& demi, & un objectif convexe des deux côtés, ou d'un côté seulement & plan de l'autre, dont le diametre soit de douze pieds. Ce télescope sera excellent pour observer les astres.

IV.

Les lunettes à deux verres convexes se feront de la même maniere; mais l'oculaire sera placé au-dessous du foyer de l'objectif. Comme les objets paroissent renversés, on pourra corriger ce défaut en plaçant un miroir au-dessus du foyer de l'oculaire, à peu près à l'endroit où l'on doit placer l'œil. Ce miroir sera de métal bien poli, d'un pouce en ovale, & faisant un angle demi-droit avec l'axe des verres : il faudra en approcher l'œil assez près pour voir distinctement les objets qui paroîtront dans leur situation naturelle. Quand on observe les astres, il n'est pas nécessaire d'y ajouter un miroir, il importe peu en quelle situation ils paroissent : d'ailleurs on s'accoutume bientôt à distinguer leur partie orientale d'avec l'occidentale.

V.

On observera que dans ces sortes de lunettes, le diametre de l'objectif doit être grand par rapport à celui de l'oculaire : car, par exemple, une lunette dont l'objectif est de vingt-cinq pieds, portera un oculaire de trois pouces, & celle dont l'objectif sera de cinquante pieds, portera un oculaire qui n'aura que quatre pouces & demi de diametre. On peut faire une lunette d'une grandeur commode, avec un objectif de deux pieds trois pouces, & un oculaire d'un pouce & demi.

VI.

Il y a une différence à faire entre les objectifs

convexes

convexes des deux côtés, & les objectifs convexes plans. Les objectifs convexes des deux côtés d'une même convexité ont leur foyer au centre de l'une des convexités, & les objectifs convexes plans ont leur foyer à l'extrêmité du diametre de la convexité. On mesure la longueur de ces lunettes par l'éloignement du foyer de leur objectif. Ainsi on dit qu'une lunette a douze pieds, si le demi-diametre de l'objectif convexe des deux côtés est de douze pieds, ou bien si le diametre de l'objectif plan convexe est de douze pieds.

VII.

Si l'on ajoute à la lunette qu'on vient de décrire, deux lentilles semblables à l'oculaire, on aura une lunette d'approche qui fera paroître les objets dans leur situation ordinaire, & qui sera meilleure que la lunette appellée communément *lunette de Galilée*. Ces deux lentilles ajoutées se placent auprès de l'oculaire dans un tuyau séparé, qu'on peut ôter quand on veut. Ainsi une lunette à deux verres peut devenir lunette à quatre verres, en ajoutant le tuyau qui contient les deux oculaires; & en ôtant ce même tuyau, une lunette à quatre verres deviendra facilement lunette à deux verres. Si la lunette à quatre verres a quelque avantage sur la lunette à deux verres, elle a aussi ce désavantage, qu'elle représente les objets moins clairement.

VIII.

Pour rendre l'objet vu par les lunettes, plus clair, on met sur l'objectif un carton percé au milieu; on fait plusieurs de ces cartons, dont les ouvertures sont de différente grandeur : on essaie

celui avec lequel on voit l'objet plus distinctement. Ce carton doit avoir son diametre égal à la largeur de l'objectif ; il faut aussi le noircir, aussi-bien que le dedans des tuyaux, pour empêcher les rayons de lumiere de se réfléchir.

I X.

On frottera le dedans des tuyaux d'un noir huilé, puis on y mettra du charbon broyé, & on les secouera ; enfin on les laissera sécher. On peut encore noircir ces tuyaux de lunettes avec la fumée d'une bougie de poix résine.

Des microscopes.

Les lunettes d'aproche nous font voir les objets que nous n'appercevons à la vue que confusément, à cause de leur éloignement ; les microscopes nous font voir distinctement les parties des corps que leur petitesse nous rend insensibles. On distingue en général deux sortes de microscopes ; le simple, qui est fait avec une seule lentille, & le composé, qui est fait de plusieurs lentilles. Les microscopes n'ont été connus que dans le siecle dernier vers l'an 1620.

On ne donnera ici la description que de quelques microscopes simples, qu'on peut faire soi-même pour se divertir : la dépense n'en sera pas grande. Si on veut avoir d'autres microscopes, soit simples, soit composés, on consultera les auteurs qui en ont traité, comme Wolfius, Jobelot, & autres.

❀

PROBLEME XXXIX.

Faire une lentille pour un microſcope ſimple.

IL faut prendre un morceau de glace de miroir ou de carroſſe, & le réduire en très-petits morceaux avec un greſſoir de vitrier ; au défaut de cet inſtrument on ſe ſervira des dents d'une clef. On choiſira entre ces petits morceaux ceux qui ſeront les plus petits & les plus plats : on en prendra un avec la pointe d'une groſſe aiguille, qui doit être aſſez longue. On mettra ce petit morceau de glace dans la flamme d'une bougie, où il ſe fondra en peu de tems ; lorſqu'il ſera fondu, il tombera de lui-même.

REMARQUE.

On mouillera la pointe de l'aiguille avec de la ſalive, pour y coller le petit morceau de glace, s'il ne s'y attache point autrement : on penchera un peu la bougie, afin que la lentille ne tombe point dans la cire, & pour la recevoir, il faut mettre au-deſſous un morceau de papier, dont les bords ſoient relevés ; car s'ils ne l'étoient pas, les petites goutes en tombant ſauteroient & ſe perdroient : ſi ces petites goutes n'étoient pas aſſez rondes, on les reprendroit, & on les feroit refondre pour les arondir davantage. On prend une aiguille aſſez longue, afin de ne ſe point brûler, quand on la met dans la flamme de la bougie. On préférera la flamme bleue de la bougie, ou la flamme de l'eſprit de vin à la flamme de la bougie.

PROBLEME XL.

Faire un microſcope avec la lentille dont on vient de donner la conſtruction.

PRenez une petite plaque de plomb, que vous rendrez plus ou moins mince, à proportion de la petiteſſe de la lentille. Faites-y avec la pointe de l'aiguille un trou propre à recevoir la lentille que vous voulez y appliquer ; vous l'y arrêterez avec les bords du trou que vous releverez.

Uſage de ce microſcope.

Ayant laiſſé tremper pendant deux ou trois jours de l'écorce de chêne, des feuilles d'herbes ou de fleurs ſeches, ou autre choſe, dans de l'eau, on en prendra une goute avec un petit bâton ; on appliquera cette goute d'eau ſur la ſurface d'un côté de la lentille : on approchera le plus près qu'on pourra de l'œil l'autre côté de la lentille ; & en regardant à la lumiere d'une bougie, on verra une infinité de petits animaux qui ſont dans un mouvement continuel.

On peut appliquer ſur l'une des ſurfaces de la lentille, un cheveu, ou autre choſe, qu'on y attachera avec un peu de cire des deux côtés de la lentille.

PROBLEME XLI.

Faire un microſcope avec une goute d'eau.

AU lieu de la lentille, on mettra une goute de l'infuſion dans le trou de la plaque de plomb, dont on vient de parler dans le problême

précédent; on regardera à travers cette goute d'infusion à la lumiere d'une bougie, & l'on y appercevra les petits animaux, qui ne cessent de se mouvoir, jusqu'à ce que la goute soit desséchée, ou qu'elle ait perdu la figure sphérique.

On peut ajuster ce microscope à l'extrêmité d'un tuyau de carton, afin que la lumiere du grand jour n'empêche point celle de la bougie. Il sera aisé à chacun de faire des réflexions sur ce qu'on vient de dire, pour rendre ces microscopes plus complets, ou pour en inventer d'autres.

Remarques sur les microscopes simples.

Les microscopes simples augmentent le diametre de l'objet qu'on regarde, en raison de la distance du foyer à huit doigts, qui est la distance où l'on peut voir distinctement un petit objet, comme seroient les lettres d'une écriture assez menue. Ainsi si la distance du foyer d'un microscope à ce microscope est d'un demi-doigt, le diametre de l'objet posé dans le foyer sera augmenté de seize fois, c'est-à-dire, que ce diametre paroîtra seize fois plus grand. Plus la distance du foyer sera petite, plus le diametre de l'objet sera augmenté. D'où il suit que les microscopes simples seront d'autant meilleurs, qu'ils seront faits des spheres plus petites.

En comparant une goute d'eau avec une goute de glace, dont on a fait les microscopes dans les problêmes précédens, on trouve que la goute de glace augmente plus le diametre de l'objet, que la goute d'eau : car supposant que ces deux goutes ayent chacune $\frac{1}{10}$ de doigt pour leurs diametres, le diametre d'un même objet paroîtra augmenté d'environ 103 fois en le regardant à travers la goute

de glace, au lieu qu'il ne paroîtra augmenté que d'environ 80 fois en le regardant à travers la goute d'eau.

La géometrie nous apprend que la superficie d'un quarré ou d'un cercle est en raison doublée du côté du quarré ou du diametre du cercle, & que le corps cubique ou sphérique est en raison triplée du côté du cube ou du diametre de la sphere. Ainsi la superficie d'un corps, dont le diametre sera augmenté de 100 fois paroîtra 10000 fois plus grande, & le corps même paroîtra 1000000 fois plus grand que s'il étoit vu sans microscope. Ce qui est une augmentation très-considérable.

C'est avec cette sorte de microscope qu'on remarque que la poussiere qui est sur les papillons, est semblable à des plumes ; que celle qui est sur l'étamine des fleurs, paroît être une multitude de petites boules ; que l'eau qui se trouve dans les moules, contient un grand nombre de petites moules ; que la semence des animaux contient une grande quantité de petits animaux qui s'y remuent en tous sens ; que les cheveux sont ronds & creux Enfin on peut observer la figure des parties du sang, du lait, &c.

Observation sur les microscopes composés.

Les microscopes composés ont des avantages très-considérables. Les grains de sable fort menus paroissent comme de petits cristaux ; les parties du corps d'une mouche s'y voyent très-distinctement ; les particules d'acier qui tombent du fusil quand on le bat pour allumer du feu, paroissent rondes & semblables au plomb des chasseurs. On remarque très-distinctement la circulation du sang, principalement dans la queue d'un poisson appellé

tanche, &c. Voyez Poliniere dans ses expériences physiques, p. 501 de la seconde édition.

De la perspective curieuse.

PROBLEME XLII.

Décrire sur un plan une figure difforme, qui paroisse au naturel, étant regardée d'un point déterminé.

ON peut déguiser, c'est-à-dire, rendre difforme une figure, par exemple, une tête, en sorte qu'elle n'aura aucune proportion étant regardée de front sur le plan où on l'aura tracée; mais étant vue d'un certain point, elle paroîtra belle, c'est à-dire, dans ses justes proportions. Cela se pratiquera de la sorte.

Ayant dessiné sur du papier la figure que vous voulez déguiser avec ses justes mésures, décrivez un quarré autour de cette figure, comme ABCD, & réduisez-le en plusieurs autres petits quarrés, divisant les côtés en plusieurs parties égales, par exemple, en sept, & tirant des lignes droites en long & en travers par les points opposés des divisions, comme font les peintres, quand ils veulent contre-tirer un tableau, & le réduire au petit pied, c'est-à-dire de grand en petit. Pl. 28, fig. 80.

Cette préparation étant faite, décrivez à discrétion sur le plan proposé le quarré long EBFG; & divisez l'un des deux plus petits côtés EG, BF, comme EG, en autant de parties égales qu'en contient DC, l'un des côtés du quarré ABCD; comme ici en sept. Divisez l'autre côté BF en deux également au point H, duquel vous tirerez par les points de division du côte opposé EG au-

tant de lignes droites, dont les deux dernieres seront EH, GH.

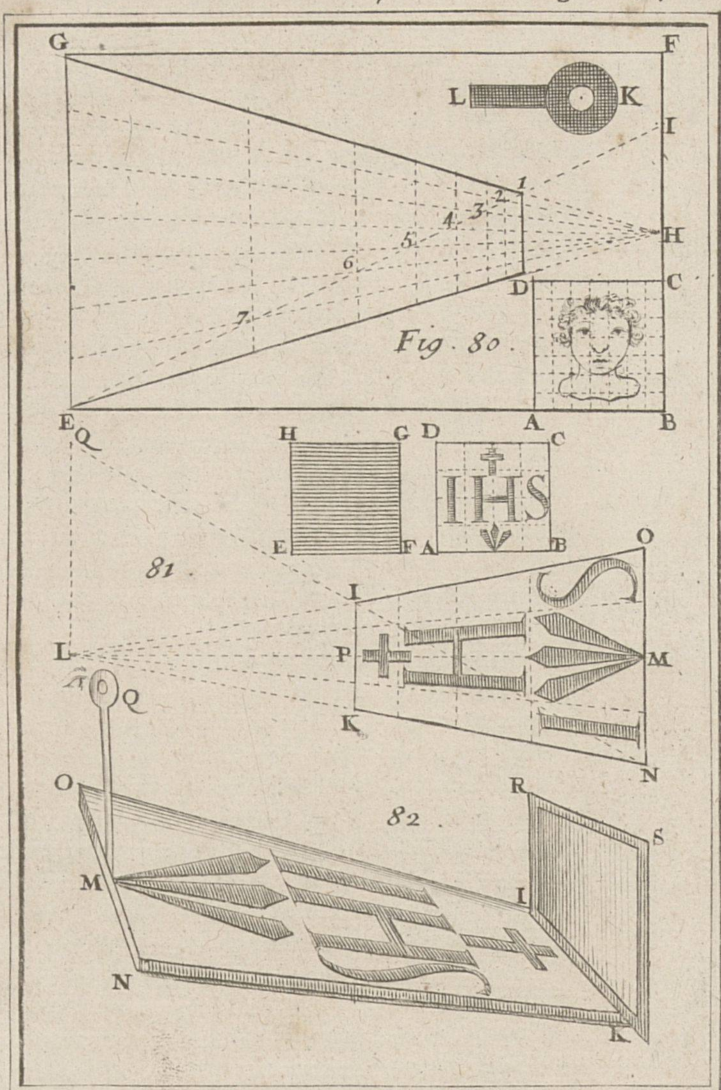
Après cela ayant pris à discrétion sur le côté BF le point I, au-dessus du point H, pour la hauteur de l'œil au-dessus du plan du tableau, tirez de ce point I au point E, la ligne droite EI, qui coupe ici celles qui partent du point H, aux points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Par ces points d'intersection vous tirerez des lignes droites paralleles entre elles, & à la base EG du triangle EHG, qui se trouvera ainsi divisé en autant de trapeses qu'il y a de quarrés dans le quarré ABCD. C'est pourquoi si l'on rapporte dans ce triangle EGH, la figure qui est dans le quarré ABCD, en faisant passer chaque trait par les mêmes trapeses ou quarrés perspectifs, qui sont représentés par les quarrés naturels du grand ABCD, la figure difforme se trouvera décrite. On la verra conforme à son prototype, c'est-à-dire, comme dans le quarré ABCD, en la regardant par un trou qui doit être petit du côté de l'œil, & bien évasé du côté de la figure, comme K, que je suppose perpendiculairement élevé sur le point H, en sorte que sa hauteur LK soit égale à la hauteur HI, qui ne doit pas être bien grande, afin que la figure soit plus difforme dans le tableau. Voyez le problême XLIV.

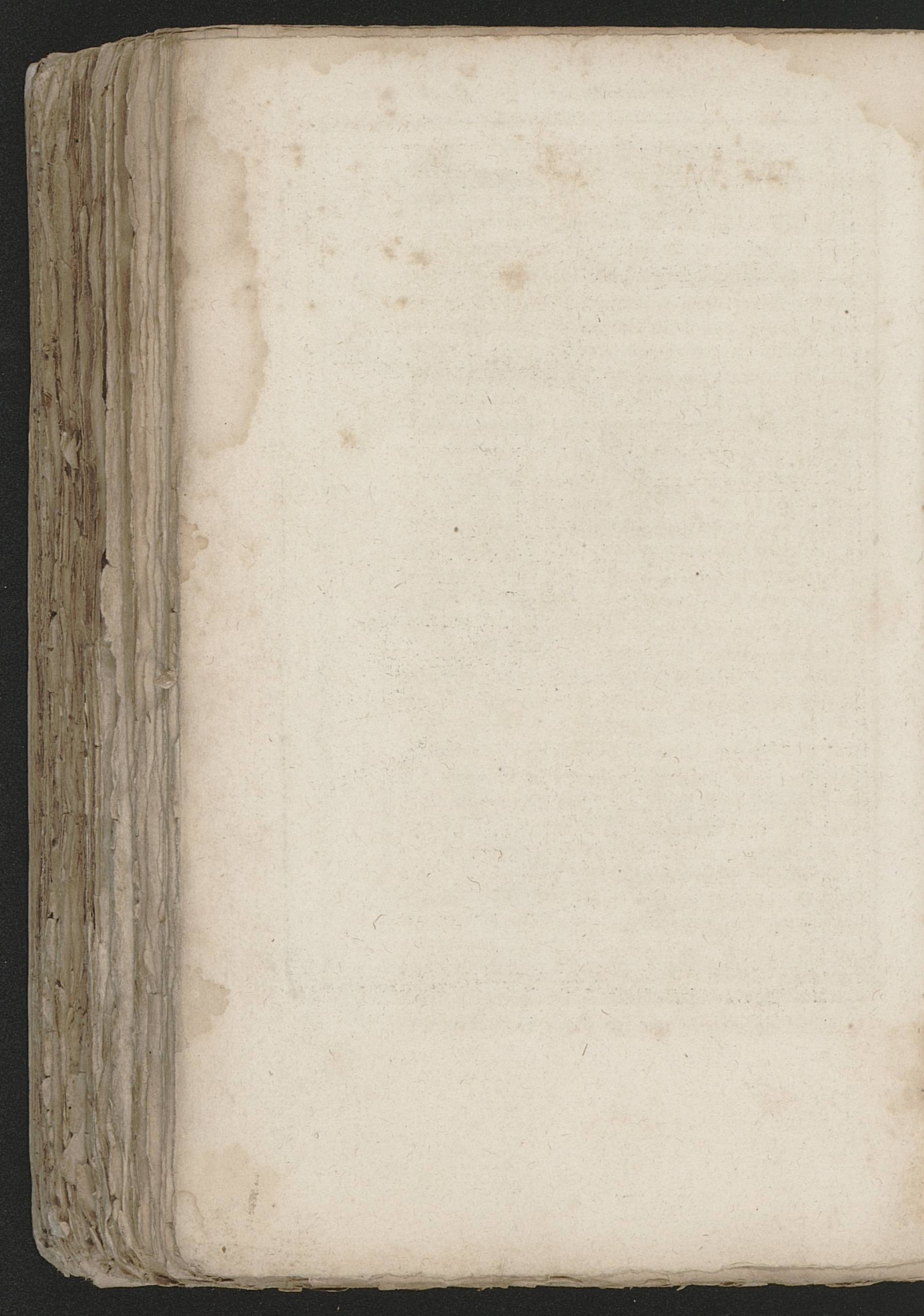
PROBLEME XLIII.

Décrire sur un plan une figure difforme, qui paroisse dans sa perfection, étant vue par réflexion dans un miroir plan.

Pl. 28, fig. 81.

AYant, comme on vient de faire, compris la figure qu'on veut déguiser dans un quarré,


G
F
L
K
I
1
2
3
4
5
6
7
H
C
D
Fig. 80.
E
A
B
Q
H
G
D
C
IHS
E
F
A
B
O
81.
I
S
L
P
M
Q
K
N
O
R
82.
S
M
I
N
K



tel qu'eſt ABCD, diviſé en plusieurs autres petits quarrés, qui ſont ici au nombre de ſeize; & ſuppoſant que le miroir eſt une glace parfaitement quarrée, toute nue & ſans quadre, comme EFGH, tirez ſur le plan du tableau la ligne droite IK, égale au côté EF du miroir, afin que la figure occupe entierement le miroir EFGH. Enſuite ayant diviſé en deux également au point P cette ligne IK, menez par le point du milieu P la perpendiculaire indéfinie LM, enſorte que les deux parties PL, PM, ſoient égales entre elles, & d'une longueur priſe à volonté.

Pl. 28. fig. 82.

Après cela élevez au point L, la ligne LQ perpendiculaire à la ligne LM, & égale au double de la ligne IK, ou du côté du miroir EF, & au point M, la ligne NO perpendiculaire à la même ligne LM, que vous prendrez auſſi double de la ligne IK, en ſorte que chacune des deux parties MN, MO, ſoit égale à la ligne IK. Joignez les droites LN, LO, qui paſſeront par les points I, K, & formeront le triangle LNO que l'on diviſera, comme au problême précédent, en autant de quarrés perſpectifs que le quarré ABCD en contient de naturels, pour y tranſporter de la même façon la figure du quarré ABCD, qui ſe trouvera difforme ſur le plan du tableau, & qui paroîtra belle & ſemblable à ſon prototype, étant vue du point Q élevé perpendiculairement ſur le point L, comme nous avons dit au problême précédent : ou bien on la verra en ſon naturel par réflexion dans le miroir EFGH, placé ſur la ligne IK, en regardant le miroir par un petit trou élevé perpendiculairement ſur le point M, à la hauteur de LQ, comme vous le voyez dans la fig. 82, où IRSK repréſente le miroir, & Q le point de l'œil, &c.

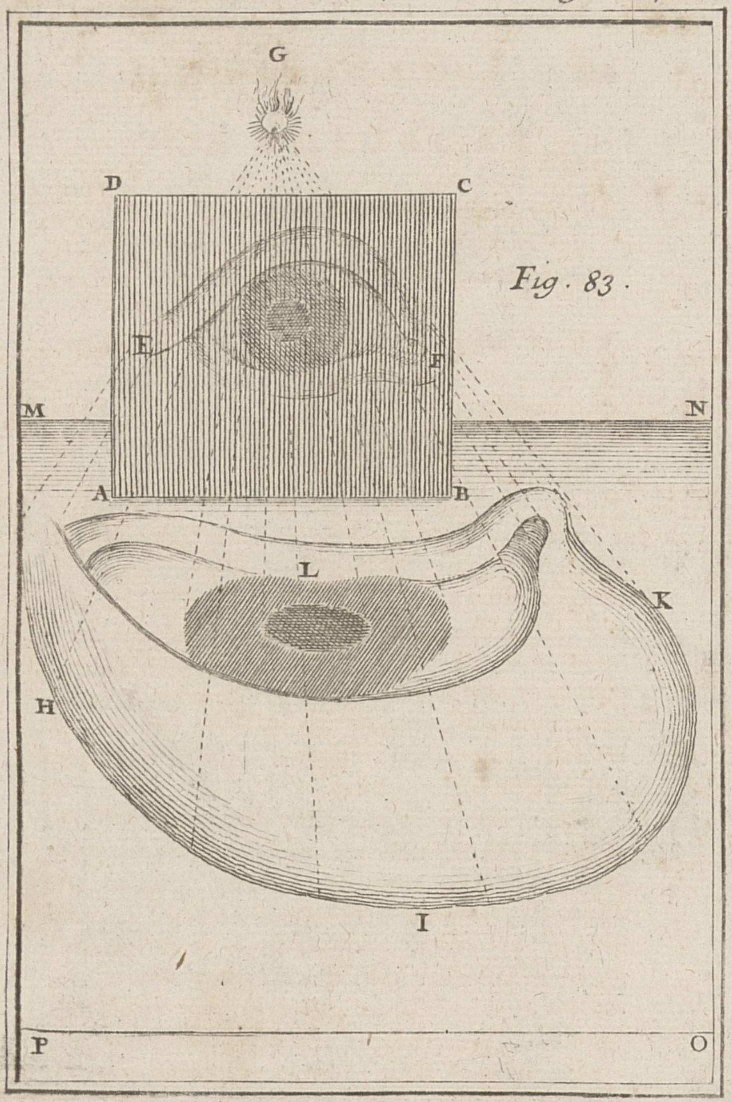
PROBLEME XLIV.

Décrire ſur un plan horiſontal une figure difforme, qui paroiſſe au naturel, ſur un plan vertical, tranſparent, poſé entre l'œil & la figure difforme.

Pl. 29, fig. 83.

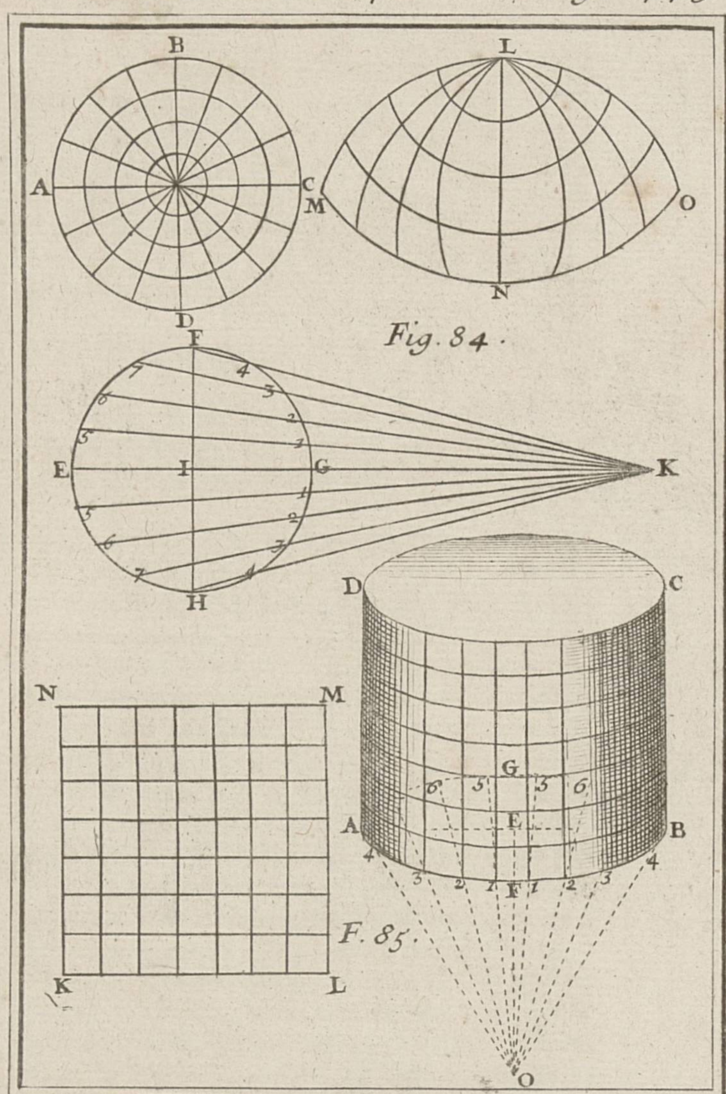
IL eſt évident que ſi l'on met en perſpective quelque figure que ce ſoit ſur du papier, conſidéré comme un plan horiſontal, & que ſur la ligne de terre on éleve à angles droits un plan tranſparent, qui ſoit, par exemple, de verre; l'œil étant placé vis-à vis du point de vue, à une hauteur égale à la diſtance de la ligne de terre à la ligne horiſontale, & éloigné du plan tranſparent, qui repréſente le tableau d'une diſtance égale à celle qu'on a ſuppoſée dans la perſpective, on verra dans le verre la figure difforme dans ſon naturel. Ceux qui entendent la perſpective, comprennent facilement ce que je viens de dire, & ceux qui ne l'entendent pas pourront réſoudre ce problême méchaniquement en cette ſorte.

Ayant décrit ſur une piece de carton ABCD, la figure que vous voulez déguiſer, avec ſes juſtes proportions : par exemple, l'œil EF, piquez cette figure EF, comme ſi vous vouliez faire un poncis : & ayant élevé à angles droits ce carton ainſi piqué ſur le plan MNOP, où vous voulez décrire la figure difforme, mettez derriere le carton ABCD, une bougie allumée à telle hauteur & à telle diſtance qu'il vous plaira, comme en G. Alors la lumiere paſſant par les trous du carton ABCD, portera la figure ſur le plan MNOP, & l'y repréſentera toute défigurée, comme HIKL,

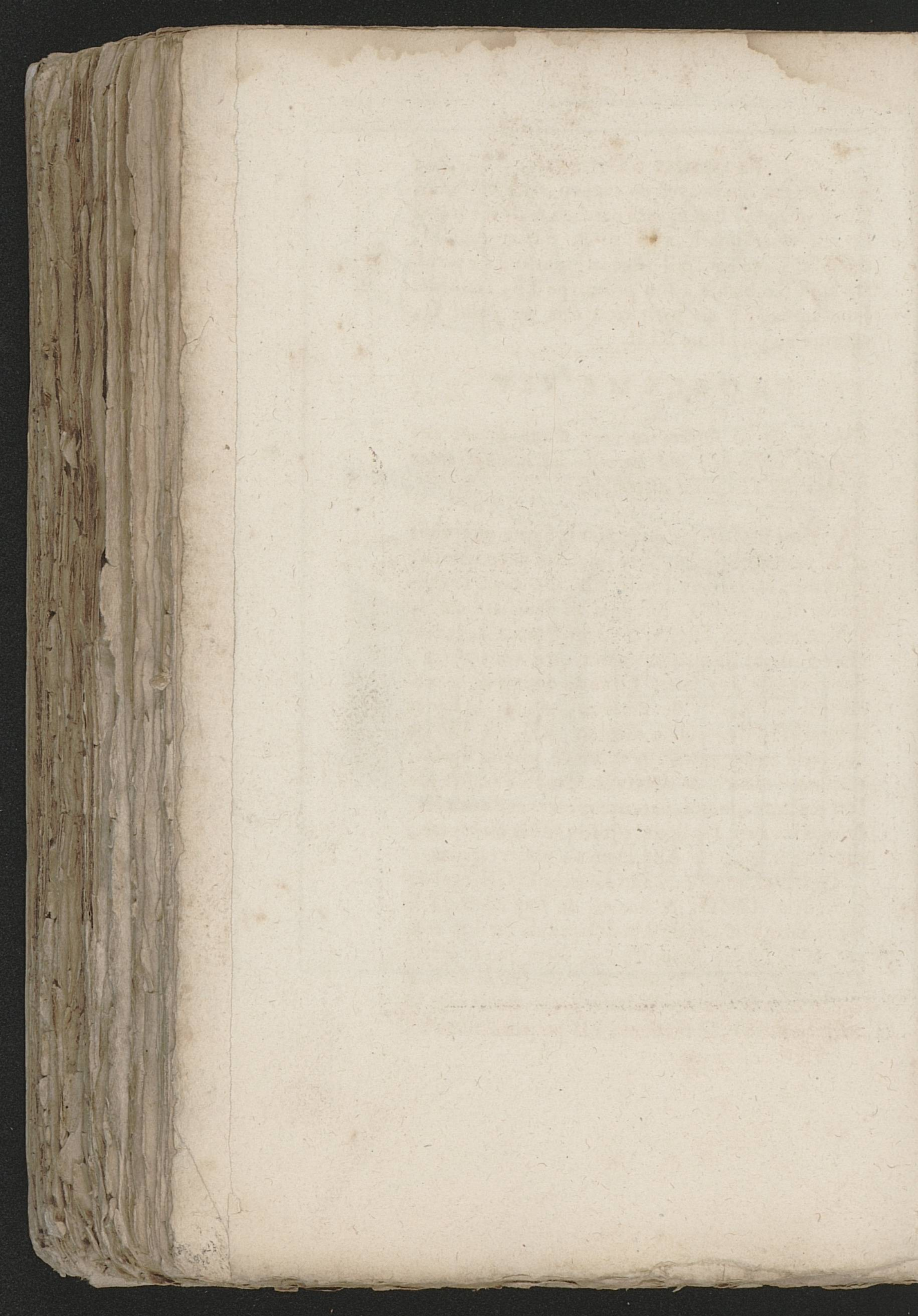


To. I. Pl. 29.





To. I. Pl. 30.



que l'on marquera avec un crayon, ou autrement. Cette image ainsi défigurée paroîtra en son naturel sur un verre mis à la place du carton ABCD, étant regardée par l'œil placé au point G. Elle paroîtra aussi semblable à son prototype EF, étant vue simplement par un petit trou mis au point G, comme au problême XLII.

PROBLEME XLV.

Décrire sur la surface convexe d'une sphere une figure difforme, qui paroisse au naturel étant regardée d'un point déterminé.

AYant dessiné sur du papier la figure que vous voulez déguiser, avec ses justes proportions, enfermez la dans un cercle ABCD, dont le diametre AC, ou BD, soit égal au diametre de la sphere proposée. Divisez la circonférence de ce cercle en autant de parties égales qu'il vous plaira, par exemple, en seize. Tirez du centre de ce cercle par les points de division, autant de lignes droites. Divisez aussi le diamette AC, ou BD de ce cercle en un certain nombre de parties égales, comme en huit, & décrivez du même centre par les points de division des circonférences de cercles, lesquelles avec les lignes droites tirées du centre, diviseront le cercle ABCD en 64 petits espaces.

Pl. 30. fig. 84.

Décrivez encore un autre cercle EFGH égal au précédent ABCD, & menez de son centre I la ligne droite IK, égale à la distance de l'œil au centre de la sphere proposée, en sorte que la partie GK soit égale à la hauteur de l'œil sur la surface de la même sphere. Ensuite ayant mené par le même centre I, le diametre FH perpendiculaire à

Pl. 30, fig. 30. la ligne IK, divisez ce diametre FH en autant de parties égales, que le diametre du premier cercle ABCD, sçavoir, en huit parties égales. Puis tirez du point K, par les points de division autant de lignes droites, qui donneront sur le demi-cercle FGH, les points 1, 2, 3, 4, & sur l'autre demi-cercle FEH, les points 5, 6, 7.

Cette préparation étant faite, décrivez sur la surface convexe du globe proposé MLO du point L, comme pole, & des intervalles G1, G2, G3, G4, GF, des cercles paralleles entre eux, dont le plus grand sera MNO, duquel on ne voit ici que la moitié, qu'il faut diviser en autant de parties égales que la moitié du cercle ABCD, comme ici en huit parties égales. Décrivez par les points de division & par le pole L, autant de grands cercles, qui avec les précédens diviseront l'hémisphere LMNO en autant de petits espaces que le cercle ABCD, dans lesquels on transportera l'image du cercle ABCD. Cette image, ou figure, qui sera défigurée dans l'hémisphere LMNO, paroîtra néanmoins semblable à son prototype, qui se trouve dans ce cercle ABCD, étant regardée d'un point élevé perpendiculairement sur le point L, & éloigné de ce point L d'une distance égale à la ligne GK.

REMARQUE.

Ce que nous avons fait sur la surface convexe d'une sphere, se peut faire de la même façon sur la surface concave de la même sphere, excepté que les cercles paralleles qui ont été décrits du pole L, avec les ouvertures G1, G2, G3, &c. doivent être décrits avec les ouvertures E5, E6, E7, EF, c'est-à-dire, qu'au lieu de se servir du demi-cercle

FGH, que l'œil placé au point K voit par sa convexité, on doit se servir de l'autre demi-cercle FEH, que l'œil placé au même point K, voit par sa concavité.

PROBLEME XLVI.

Décrire sur la surface convexe d'un cylindre une figure difforme, qui paroisse belle quand elle sera vue d'un point déterminé.

AYant, comme à l'ordinaire, renfermé la figure qu'on veut déguiser en un quarré KLMN, divisé en plusieurs autres petits quarrés, & ayant déterminé le point de l'œil en O, à une distance raisonnable du cylindre proposé ABCD, dont la base est le cercle AFBG, tirez du centre E de cette base par le point déterminé O, la ligne droite EO; menez perpendiculairement à cette ligne EO, par le même centre E, le diametre AB, que vous diviserez en autant de parties égales qu'en contient le côté KL du quarré KLMN. Tirez du point O, par les points de division autant de lignes droites, qui donneront sur la circonférence du demi-cercle AFB, que l'œil voit, les points 1, 2, 3, 4, & sur la circonférence de l'autre demi-cercle AGB, que l'œil ne voit pas, les points 5, 6, 7.

Pl. 30, fig. 85.

Après cela tirez par les points 1, 2, 3, 4, sur la surface du cylindre des lignes paralleles entre elles & à l'axe du même cylindre, ou au côté AD, ou BC. Puis ayant divisé une de ces paralleles en autant de parties égales qu'en contient le diametre AB, decrivez sur la surface du même cylindre par les points de division des circonfé-

rences de cercle paralleles à la circonférence AFBG, lesquelles, avec les lignes droites paralleles précédentes, formeront de petits espaces, dans lesquels on transportera la figure du quarré KLMN. Cette image, qui se trouvera défigurée sur la surface du cylindre ABCD, paroîtra néanmoins conforme à son prototype, étant regardée par un petit trou placé au point O, où l'œil a été supposé dans la construction.

REMARQUE.

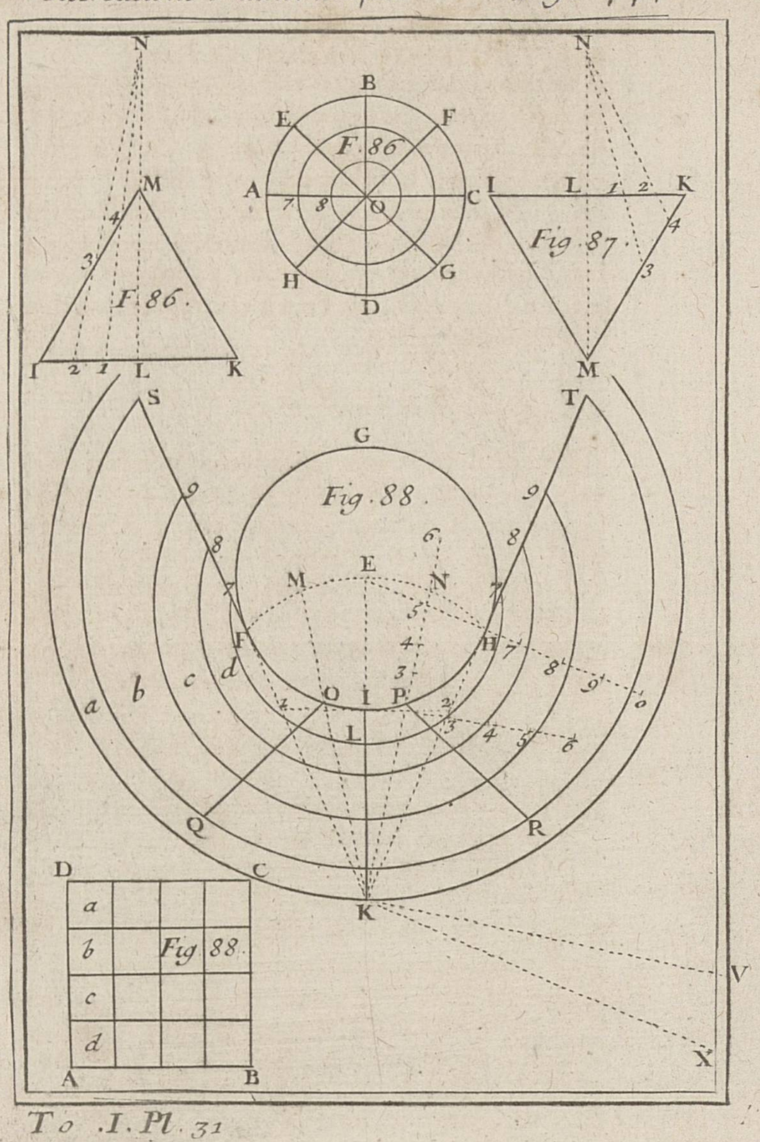
Ce que nous venons de faire sur la surface convexe du cylindre ABCD, se peut faire de la même façon dans sa surface concave, en se servant du demi-cercle AGB, comme nous avons fait du demi-cercle AFB, c'est-à dire, en élevant des perpendiculaires des points 5, 6, 7, dans la surface concave, comme nous avons fait des points 1, 2, 3, 4, dans la surface convexe, &c.

PROBLEME XLVII.

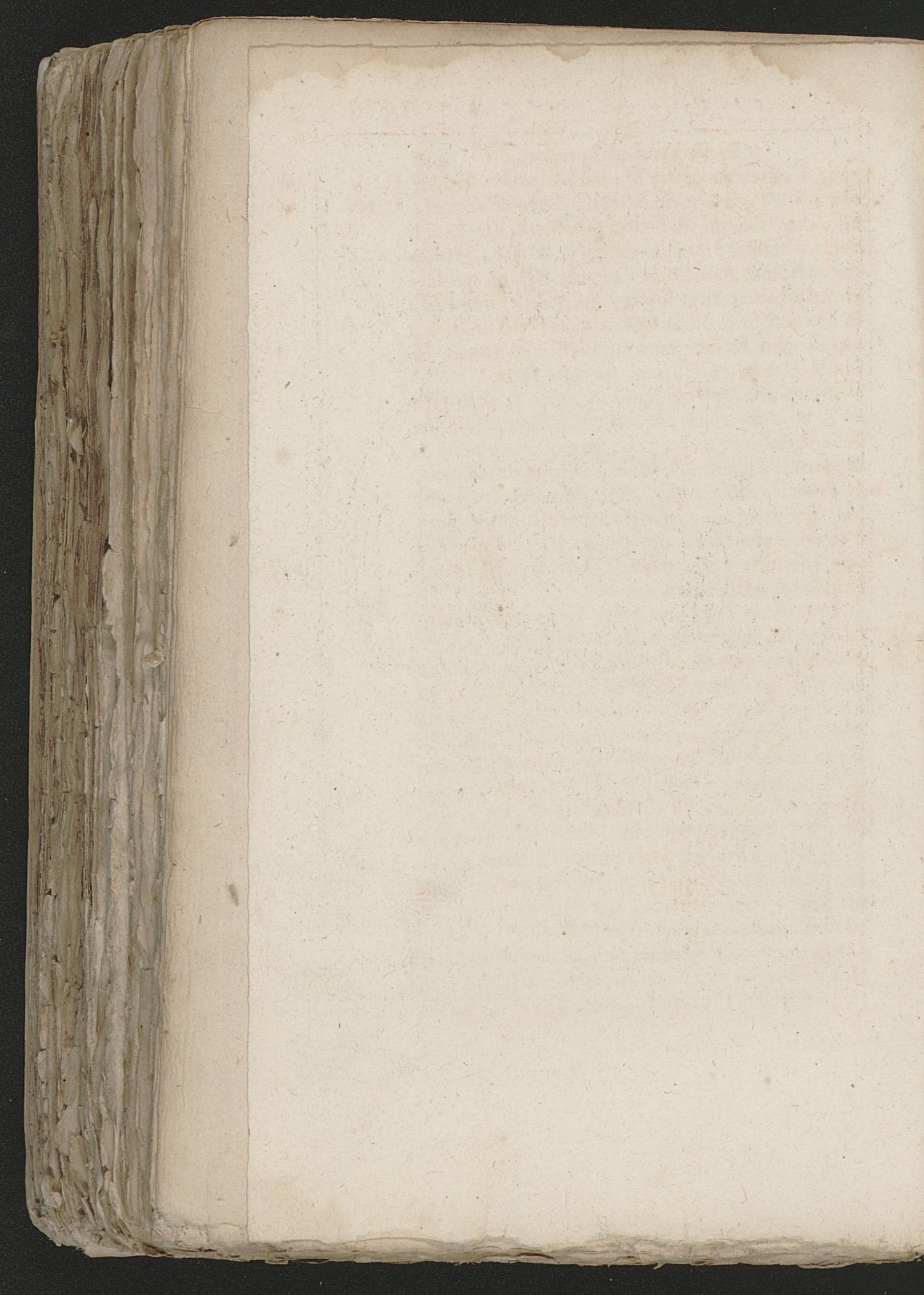
Décrire sur la surface convexe d'un cone une figure difforme, qui paroisse en son naturel, étant regardée d'un point déterminé.

Pl. 3, fig. 86.

DÉcrivez autour de la figure que vous voulez déguiser, un cercle à volonté, comme ABCD, & divisez sa circonférence en autant de parties égales qu'il vous plaira, comme en huit. Tirez par les points de division A, E, B, F, &c, au centre O, autant de demi diametres. L'un de ces demi diametres, comme AO, étant divisé, par exemple, en trois parties égales aux points 7, 8,


N
M
4
3
F. 86.
I 2 1 L K
B
E F
F. 86
A 7 8 O C
H G
D
N
I L 1 2 K
4
Fig. 87.
3
M
S
T
G
Fig. 88.
9
8
7
F
E
M N
6
5
4
3
H 7
8
9
10
9
8
7
a b c d
O I P
2
3 4 5 6
L
Q R
C
K
V
X
D
a
b Fig 88.
c
d
A B

N°



vous décrirez du centre O, par ces points de division, 7, 8, autant de circonférences de cercles, qui, avec les demi diametres précédens, diviseront l'espace terminé par la premiere & plus grande circonférence ABCD en 24 petits espaces, qui serviront à contre-tirer l'image qui y sera comprise, & à la défigurer sur la surface convexe d'un cone, quand cette surface aura été divisée en autant de semblables petits espaces, en cette sorte.

Pl. 31. fig. 86.

Ayant tiré à part la ligne IK égale au diametre de la base du cone proposé, & l'ayant divisé en deux également au point L, élevez en ce point L la perpendiculaire LM égale à la hauteur du cone. Joignez les droites MI, MK, qui représenteront les côtés de ce cone, que je suppose droit, comme si ce cone avoit été coupé par un plan tiré par son axe, de sorte que le triangle isoscele IKM représentera le triangle de l'axe.

Cela étant fait, prolongez la perpendiculaire LM en N, autant au-dessus du point M, qui représente la pointe du cone, que vous voudrez que l'œil soit élevé au-dessus de cette pointe; en sorte que la ligne MN soit égale à la distance de l'œil au sommet du cone. Ayant divisé la moitié IL de la base IK en autant de parties égales que le demi-diametre AO du prototype, tirez du point N, par les points de division 1, 2, les droites N1, N2, qui donneront sur le côté IM les points 4, 3. Enfin décrivez de la pointe du cone & des intervales M3, M4, des circonférences de cercle sur la convexité du cone, qui représenteront les circonférences du prototype ABCD. Puis ayant divisé la circonférence de la base du cone en autant de parties égales qu'en contient la circonférence ABCD, tirez de la pointe du centre par les

points de division autant de lignes droites, qui, avec les circonférences précédentes, diviseront la surface convexe du cone en 24 espaces difformes, qui représenteront ceux du prototype ABCD, & dans lesquels par conséquent on transportera la figure de ce prototype, qui se trouvera difforme sur la surface du cone, & qui étant regardé de l'œil mis directement au-dessus de la pointe du cone à la distance MN, paroîtra comme une surface plane & conforme à son prototype.

REMARQUE.

Pl. 31, fig. 87. Ce que nous venons de faire sur la surface convexe d'un cone posé sur sa base, peut se pratiquer de la même façon sur la surface concave d'un cone creux, posé sur sa pointe, excepté qu'il faut prolonger la perpendiculaire LM au-delà du point L en N; de sorte que la ligne MN soit égale à la distance de l'œil à la pointe du cone, qui dans ce cas lui doit servir de base, afin que l'œil placé en N, le puisse voir par le dedans, &c.

PROBLEME XLVIII.

Décrire sur un plan horisontal une figure difforme, qui paroisse belle sur la surface convexe d'un miroir cylindrique droit, étant vue par réflexion d'un point donné.

Fig. 88. IL faut premierement enfermer dans un quarré, comme ABCD, la figure qu'on veut déguiser, & diviser ce quarré ABCD en seize autres petits quarrés, qui serviront à transporter la figure du prototype sur les quarrés semblables difformes qu'on

qu'on aura décrits sur la surface placée au pied du miroir cylindrique, dont la base est le cercle FGHI, qui a le point E pour centre. Ce qui se fera en cette sorte.

Pl. 31, fig. 38.

Si K est l'assiete de l'œil, c'est-à-dire, le point qui répond sur le plan horisontal perpendiculairement à l'œil qui peut être éloigné du cylindre d'un ou de deux pieds, & un peu plus haut que le cylindre, afin qu'il puisse voir par réflexion plus de parties du plan horisontal; tirez par ce point K & par le centre E, la droite KE. Divisez KE en deux parties égales au point L. De ce point L & pour rayon LE, décrivez l'arc de cercle FEH, qui donnera sur la circonférence FGHI, les deux points F, H. Par le point K, & par les points F, H, vous tirerez les droites KFS, KHT, qui toucheront cette circonférence aux mêmes points F, H.

Aprés cela divisez chacun des deux arcs égaux EF, EH, en deux également aux points M, N; & tirez du point K par les points M, N, les droites KM, KN, qui donneront sur la circonférence FIH, les deux points O, P. Par ces points G, P, vous tirerez les deux lignes OQ, PR, en sorte que l'angle de réflexion FOQ soit égal à l'angle d'incidence PGK, en prenant la ligne KO pour un rayon d'incidence, & que pareillement l'angle de réflexion HPR soit égal à l'angle d'incidence OPK, en prenant la ligne KP pour un rayon d'incidence. Alors les cinq lignes IK, OQ, PR, FS, HT, représenteront les lignes du prototype, qui sont paralleles aux deux côtés AD, BC, que les deux touchantes ES, HT, représentent. Il ne reste plus qu'à diviser ces lignes en quatre parties égales en représentation; ce que je

Pl. 31, fig. 88.
ferai de la maniere qui suit, pour avoir plutôt fait sans que l'erreur puisse être considérable.

Ayant mené par le point I, où la ligne KE coupe la circonférence FIH, la ligne 1, 2, perpendiculaire à la même ligne KE, qui sera terminée aux points 1, 2, par les deux touchantes KF, KH, tirez du centre E par le point H la droite H o, que vous ferez égale à la ligne 1, 2, & divisez-la en quatre parties égales aux points 7, 8, 9. Tirez ensuite par le point K, la droite KX, que vous ferez égale à la hauteur de l'œil, & parallele à la ligne H o, ou perpendiculaire à la touchante KH. Ayant appliqué une regle bien droite au point X, & aux points de division 7, 8, 9, o, marquez des points sur la ligne HT, dans les endroits où elle se trouvera coupée successivement par la regle. La ligne HT se trouvera divisée aux points 7, 8, 9, T, en parties égales en apparence à celle de la ligne 1, 2, qui est divisée par les lignes tirées du point K, en quatre parties qui sont presque égales entre elles. Enfin portez les divisions de la touchante HT sur l'autre touchante FS.

Pour diviser la ligne PR en quatre parties égales en représentation à celles de la ligne 1, 2, tirez par le point P, la ligne P6, que vous ferez perpendiculaire à la ligne KP, & égale à la ligne 1, 2. Divisez cette perpendiculaire P6 en quatre parties égales aux points 3, 4, 5. Tirez pareillement par le point K, la ligne KV, que vous ferez égale à la hauteur de l'œil, & parallele à la ligne P6, ou perpendiculaire à KP. Ayant comme auparavant appliqué une regle au point V, & aux points de division 3, 4, 5, 6, marquez sur la ligne KP prolongée les points 3, 4, 5, 6,

dans les endroits où elle sera coupée par la regle. Enfin portez les divisions de la ligne PN sur chacune des deux lignes PR, OQ, & faites passer par les points également éloignés de la circonférence FCHI, qui ont été marqués sur les quatre lignes FS, OQ, PR, HT, quatre circonférences de cercles, qui avec les lignes droites FS, OQ, IK, PR, HT, formeront seize quarrés difformes, dans lesquels on transportera la figure du prototype ABCD, qui se trouvera défigurée sur le plan horisontal, & qui paroîtra dans sa perfection sur la surface convexe du miroir cylindrique, posé droit sur la base FGHI, quand elle sera vue par réflexion de l'œil élevé perpendiculairement sur le point K à une hauteur égale à la ligne KV ou KX. Voyez la remarque du problême suivant.

Pl. 31, fig. 88.

PROBLEME XLIX.

Décrire sur un plan horisontal une figure difforme qui paroisse belle sur la surface convexe d'un miroir conique élevé à angles droits sur ce plan, étant vue par réflexion d'un point donné dans l'axe prolongé de ce cone.

DEcrivez autour de la figure que vous voulez déguiser, le cercle ABCD d'une grandeur prise à volonté, & divisez sa circonférence en tel nombre de parties égales qu'il vous plaira. Tirez du centre E par les points de division autant de demi-diametres, dont l'un, comme AE, ou DE, doit aussi être divisé en un certain nombre de parties égales. Décrivez du centre E par les points de division autant de circonférences de cercle, qui

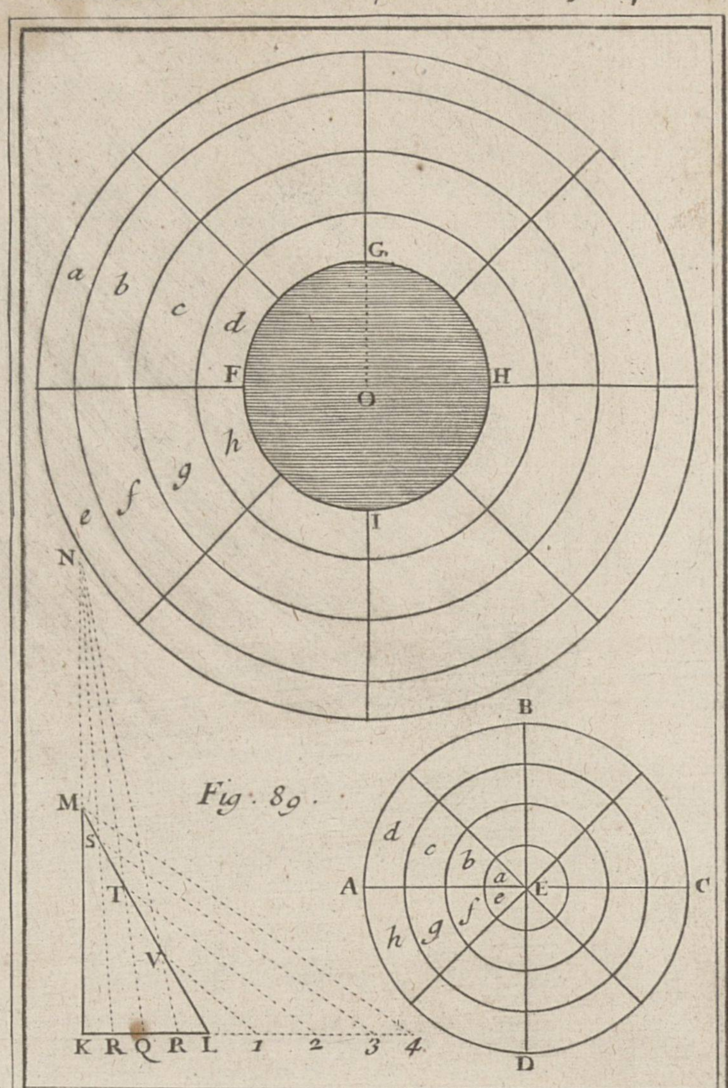
Pl. 32. fig. 89.

Pl. 32, fig. 89.

avec les demi-diametres précédens, diviſeront l'eſpace terminé par la premiere & plus grande circonférence ABCD, en pluſieurs petits eſpaces, qui ſerviront à entretenir la figure qui y ſera compriſe, & à la défigurer ſur le plan horiſontal autour de la baſe FGHI du miroir conique en cette ſorte.

Ayant pris le cercle FGHI, dont le centre eſt O, pour la baſe du cone, faites à part le triangle rectangle KLM, dont la baſe KL ſoit priſe égale au demi-diametre OG de la baſe du cone, & la hauteur KM égale à la hauteur du même cone. Prolongez cette hauteur KM en N, de ſorte que la partie MN ſoit égale à la diſtance de l'œil à la pointe du cone, ou toute la ligne KN égale à la hauteur de l'œil au-deſſus de la baſe du cone. Ayant diviſé la baſe KL en autant de parties égales qu'en contient le demi-diametre AE, ou DE, du prototype, tirez du point N, par les points de diviſions P, Q, R, autant de lignes droites, qui donneront ſur l'hypoténuſe LM, qui repréſente le côté du cone, les points S, T, V. Faites au point V l'angle LV1 égal à l'angle LVR, au point T l'angle LT2 égal à l'angle LTQ, au point S l'angle LS3 égal à l'angle LSP, & au point M, qui repréſente le ſommet du cone, l'angle LM4 égal à l'angle LMK, pour avoir ſur la baſe KL prolongée les points 1, 2, 3, 4.

Enfin décrivez du centre O de la baſe FGHI du miroir conique, & des intervalles K1, K2, K3, K4, des circonférences de cercles, qui repréſenteront celles du prototype ABCD, & dont la plus grande doit être diviſée en autant de parties égales que la circonférence ABCD. Puis tirez du centre O, par les points de diviſion, des demi-diametres



To. I. Pl. 32



qui donneront sur le plan horisontal autant de petits espaces difformes que dans le prototype ABCD, dans lesquels par conséquent on pourra transporter la figure de prototype. Cette image se trouvera extrêmement défigurée sur le plan horisontal, & paroîtra néanmoins par réflexion dans ses justes proportions sur la surface du miroir conique posé sur le cercle FGHI, quand l'œil sera mis perpendiculairement au-dessus du centre O, & éloigné de ce centre O d'une distance égale à la ligne KN.

REMARQUE.

Pour ne vous pas tromper en transportant ce qui est dans le prototype ABCD, sur le plan horisontal, on prendra garde que ce qui est le plus éloigné du centre E, doit être le plus proche de la base FGHI du miroir conique, comme vous voyez par les mêmes lettres, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, du plan horisontal & du prototype. On observera la même chose à l'égard d'un miroir cylindrique, comme vous voyez aussi par les quatre lettres semblables *a*, *b*, *c*, *d*, du plan horisontal & du prototype.

Pl. 32. fig. 88.

PROBLEME L.

Décrire une lanterne artificielle, par le moyen de laquelle on puisse lire la nuit de fort loin.

FAites une lanterne qui ait la forme d'un cylindre, ou d'un petit tonneau situé selon sa longueur, comme un tonneau de vin posé dans une cave, en sorte que la fumée passe par le bondon. Mettez à l'un de ses deux fonds un miroir

concave parabolique. Appliquez à ſon foyer la flamme d'une bougie, dont la lumiere ſe réfléchira fort loin en paſſant par l'autre fond qui doit être ouvert, & elle paroîtra ſi éclatante, que la nuit on pourra lire de fort loin des lettres très-petites, lorſqu'on les regardera avec des lunettes de longue vue. Ceux qui verront de loin la lumiere de cette bougie, croiront voir un grand feu, qui paroîtroit encore plus éclatant, ſi la lanterne, étant étamée par le dedans, avoit la figure d'une ellipſe.

REMARQUE.

On ſe ſert auſſi d'un ſemblable miroir pour la *lanterne magique*, ainſi appellée, parce que par ſon moyen l'on fait voir ſur une muraille blanche de quelque chambre obſcure tout ce que l'on veut. De ſorte qu'on peut faire paroître des monſtres & des ſpectres ſi affreux que celui qui les voit ſans en connoître le ſecret, croit que cela ſe fait par magie. La lumiere qui ſe réfléchit par le moyen de ce miroir, paſſe par un trou de la lanterne, où il y a un verre de lunette. On fait paſſer entre ce verre & la lumiere une piece de bois plate & déliée, contenant pluſieurs petits verres peints de diverſes figures extraordinaires & affreuſes, que l'on fait couler ſucceſſivement par une fente qui eſt dans le corps de la lanterne. Ces petites figures ſe repréſentent ſur la muraille oppoſée avec leurs mêmes couleurs & proportions en plus grand volume : ce qui donne de la terreur, & cauſe de l'admiration aux ſpectateurs qui n'en connoiſſent pas l'artifice. Voyez les problêmes de phyſique.

PROBLEME LI.

Par le moyen de deux miroirs plans faire paroître un visage sous des formes différentes.

AYant placé horisontalement l'un des deux miroirs plans, élevez l'autre à peu près à angles droits au-dessus du premier, les deux miroirs demeurant dans cette situation, si vous vous approchez du miroir perpendiculaire, vous y verrez votre visage tout à fait difforme & imparfait, car il paroîtra sans front, sans yeux, sans nez & sans oreilles, vous ne verrez que la bouche & le menton fort élevés. Si vous inclinez tant soit peu le miroir perpendiculaire, votre visage y paroîtra avec toutes ses parties, excepté les yeux & le front. Si vous l'inclinez un peu plus, vous y verrez deux nez & quatre yeux, & en l'inclinant encore un peu davautage, vous y verrez trois nez & six yeux. Si vous continuez à l'incliner un peu davantage, vous ne verrez plus que deux nez, deux bouches & deux mentons; & en l'inclinant encore un peu plus, vous y verrez seulement un nez & une bouche : & votre visage cessera de paroître entierement dans ce miroir, si vous l'inclinez encore un peu plus, ce qui arrivera lorsque l'angle d'inclinaison sera d'environ 45 degrés.

Si vous inclinez les deux miroirs l'un à l'autre, vous y pourrez voir votre visage tout entier, & par les différentes inclinaisons, vous verrez dans le même miroir l'image de votre visage alternativement droite & renversée, &c.

REMARQUE.

Si on mêle avec la matiere du miroir, lorsqu'elle

eſt encore dans la fournaiſe, un peu de maſſicot, de ſafran, ou quelqu'autre couleur jaune, celui qui s'y mirera paroîtra avoir la jauniſſe. Si on y mêle du noir en petite quantité, il paroîtra avoir la face livide & comme plombée : ſi on en mêle en plus grande quantité, il ſemblera avoir le viſage d'un Ethiopien. Si on y jette de la lacque, du cinabre ou vermillon, celui qui s'y regardera, ſera étonné de ſe voir tout rouge & comme enflammé de colere, ou enluminé comme un yvrogne. En un mot, on paroîtra avoir autant de couleurs différentes qu'on en aura mêlé dans la matiere dont on aura fait les miroirs où l'on ſe regardera.

PROBLEME LII.

Faire voir un jetton qui ſeroit caché à l'œil dans le fond d'un vaſe vuide.

Pl 27, fig. 10.

ON a mis un jetton C au fond d'un vaſe vuide AB. On s'eſt éloigné du vaſe, juſqu'à ce que l'extrêmité E du bord de ce vaſe ait caché ce jetton à l'œil placé en D. On propoſe de faire enſorte que l'œil apperçoive le jetton, ſans changer la ſituation de l'un ni de l'autre. Faites remplir d'eau le vaſe : auſſi-tôt l'œil appercevra le jetton, comme s'il étoit un peu élevé vers F.

On a déja dit que les rayons de lumiere ſe rompoient en s'écartant de la perpendiculaire, lorſqu'ils paſſoient d'un milieu tranſparent dans un autre milieu rranſparent plus fluide. Le vaſe étant vuide, on ne pouvoit appercevoir le jetton, parce que le bord du vaſe empêchoit les rayons de lumiere d'être réfléchis du jetton à l'œil. Mais le

vase ayant été rempli d'eau, un rayon de lumiere, par exemple, CE, sortant de l'eau, au lieu de continuer jusqu'en G par la droite EG, se détourne & va frapper l'œil par la ligne ED, qui s'écarte de la perpendiculaire EH.

Ce jetton paroît un peu élevé vers F, à cause qu'on croit le voir par la ligne droite DF, qui est égale aux deux lignes AE & EC.

On explique par ce principe pourquoi un bâton mis obliquement dans l'eau, paroît rompu.

PROBLEME LIII.

Représenter une iris sur le plancher d'une chambre obscure.

IL faut se servir d'un prisme triangulaire, que les artisans appellent simplement triangle, qui étant appliqué sur la racine du nez, fait paroître les objets avec des couleurs semblables à celle de l'iris, ou arc-en-ciel. Mettez ce prisme à une fenêtre de la chambre où le soleil donne, les rayons du soleil en passant au travers de ce verre triangulaire, formeront sur le plancher de la chambre une iris, qui sera très-agréable à voir, principalement si le plancher est fait en voûte, parce que cela donnera à l'iris une figure ronde & semblable à celle de l'iris que nous voyons dans les nuées.

REMARQUES.

Ce prisme triangulaire nous donne occasion de rapporter ici ce que M. de Mairan a dit dans sa dissertation sur les phosphores & les noctiluques, touchant les rayons de lumiere qui passent

au travers d'un prisme triangulaire. Voici de quelle maniere il s'exprime.

« On prouve par des expériences décisives,

» Que la lumiere contient en elle-même toutes
» les couleurs indépendamment des configurations
» intérieures ou extérieures des corps au travers
» desquels elle passe, ou sur lesquels elle se réflé-
» chit; c'est-à-dire, qu'un rayon sensible du soleil,
» par exemple, est composé de particules de diffé-
» rente espece, dont chacune a la propriété d'ex-
» citer dans l'ame, par le moyen de l'organe de la
» vue, le sentiment de couleur particuliere de cette
» espece, sans qu'aucune réflexion, ni qu'aucune
» réfraction puisse jamais la changer.

» Que le blanc n'est pas proprement une couleur
» mais un composé de toutes les couleurs, & que
» le noir au contraire n'est que la négation de tou-
» tes les couleurs.

» Que chaque couleur des corps ne consiste dans
» la figure & dans l'arrangement particulier des
» parties qui le composent, qu'en tant qu'ils sont
» par-là plus propres à rompre & à absorber dans
» leurs pores la lumiere d'une certaine couleur, &
» à réfléchir celles d'une autre couleur. Ainsi le
» carmin, par exemple, est fort rouge, parce qu'il
» ne réfléchit que la lumiere rouge, & que toutes
» les autres especes de lumiere se rompent & se
» perdent dans ses pores sans se réfléchir.

» Enfin que chaque espece de lumiere a sa réfrac-
» tion déterminée, c'est-à-dire, que chaque cou-
» leur, en passant obliquement d'un milieu dans un
» autre, de l'air, par exemple, dans le cristal, se
» rompt à sa rencontre par un angle particulier,
» différent de celui des autres couleurs. C'est ce
» que M. Newton, auteur de cette découverte,

» appelle la *différence réfrangibilité des couleurs de*
» *la lumiere*. C'est principalement par cette pro-
» priété qu'il a reconnu toutes les autres, & les
» ingénieuses expériences, dont il s'est servi pour
» s'en assurer, pourroient toutes seules immortali-
» ser un nom moins célebre que le sien. Voici la
» plus facile, qui suffira néanmoins pour mettre
» les personnes qui n'ont pas vu l'optique de M.
» Newton, au fait de ce que j'ai à dire sur cette
« matiere ».

» Faites entrer un rayon de soleil dans une cham-
» bre obscure, par un petit trou rond de 3 ou 4 li-
» gnes de diametre : placez horisontalement auprès
» de ce trou un prisme triangulaire de verre, dans
» une telle situation que le rayon du soleil soit à
» peu près perpendiculaire à l'axe de ce prisme, &
» qu'il entre par une de ses surfaces, & sorte par
» l'autre, de maniere que le tranchant formé par
» ces deux surfaces, regarde en bas. Ce rayon,
» après avoir traversé le prisme, entrera dans la
» chambre, en s'étendant de bas en haut, & s'ira
» peindre sur le mur opposé. Il est encore mieux de
» le recevoir sur un carton bien blanc, à sept ou
» huit pas de la fenêtre, & il y formera une bande
» verticale d'un pied de longueur, par exemple, &
» de deux ou trois pouces de largeur. Cette bande
» contiendra séparément les cinq couleurs primiti-
» ves, rouge, jaune, verd, bleu & violet, qui la
» diviseront en cinq espaces un peu inégaux, en
» commençant par le bas dans l'ordre précédent,
» rouge, &c. Les nuances, ou les couleurs secon-
» des, se trouveront entre les couleurs primitives
» dont elles participent; sçavoir, entre le rouge & le
» jaune, la couleur d'or foncé; entre le bleu azuré
» & le violet, le bleu turquin, & ainsi des

» autres. Si l'on fait paſſer au travers d'un autre
» priſme, à quatre ou cinq pas du premier, une
» ſeule de ces couleurs ſéparées, qui compoſoient
» le rayon, elle ne changera point du tout en s'y
» rompant, parce qu'elle ne contient qu'une lu-
» miere homogene; mais ſi on les ramaſſe toutes
» par le moyen de quelque verre convexe, elles
» ſe confondront, & il ſe formera de leur confuſion
» un nouveau rayon de lumiere blanc tirant ſur le
» jaune, & tel qu'il étoit en partant du ſoleil, ou
» avant que d'avoir traverſé ce premier priſme.
» On peut varier cette expérience de mille manie-
» res, & à force de filtrer, ſi je l'oſe dire, & de
» tamiſer ainſi la lumiere, ſe convaincre parfaite-
» ment qu'elle a toutes les propriétés dont j'ai fait
» mention. Il faut obſerver ſur-tout que le diffé-
» rent degré de réfrangibilité de ſes couleurs,
» lorſqu'elle paſſe au travers d'un priſme, eſt l'uni-
» que cauſe de leur ſéparation, & qu'ainſi le vio-
» let, par exemple, eſt plus réfrangible que le
» rouge de la quantité d'un angle, dont le ſinus eſt
» proportionnel à la diſtance qu'il y a du rouge au
» violet dans la bande verticale ».

Fin du premier tome.

TABLE DES PROBLÊMES.

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE.

PROBLEMES DE GEOMETRIE.

PROBLEMES DE MUSIQUE.

PROBLEMES D'OPTIQUE.

Fin de la table du I. tome.

CATALOGUE

Des Livres du fonds de CLAUDE-ANTOINE JOMBERT, *fils aîné, Libraire, rue Dauphine, à Paris.* 1770.

Ouvrages de M. OZANAM, *de l'Acad. des Sciences.*

COURS de Mathématique, qui comprend les parties de cette ſcience les plus utiles à un homme de guerre. En cinq vol. *in*-8°. avec plus de 200 pl. 40 liv.

L'Arithmétique, où toutes les parties de cette ſcience ſont démontrées d'une maniere courte & facile, *in*-8°. *broché*, 2 liv. 10 ſ.

La Trigonométrie rectiligne & ſphérique, avec les tables des ſinus, tangentes & ſécantes, & des Logarithmes. Par Adrien Wlacq, *in*-8°. nouvelle édition augmentée 1765, avec 6 planches, 6 liv.

La Méchanique, où il eſt traité des machines ſimples & compoſées, de l'hydroſtatique & des machines hydrauliques, &c. *in*-8°. avec 28 planches, 6 liv.

La Perſpective théorique & pratique, où l'on enſeigne la méthode de mettre toutes ſortes d'objets en perſpective, & d'en repréſenter les ombres cauſées par le ſoleil ou par quelqu'autre lumiere, *in*-8°. avec 36 planc. 6 liv.

La Géographie & Coſmographie, où l'on traite de la ſphere, de la connoiſſance des corps céleſtes, des différens ſyſtêmes du monde, du globe, &c. *in*-8°. avec 14 planches, 6 liv.

La Gnomonique, où l'on donne la maniere de faire des cadrans ſolaires ſur toutes ſortes de ſurfaces, &c. *in*-8°. avec 30 planches, 6 liv.

Les Récréations Mathématiques & Phyſiques, contenant pluſieurs problêmes curieux d'arithmétique, de géométrie, de méchanique, d'optique, de gnomonique & de phyſique. En quatre volumes, *in*-8°. avec 147 planches, nouvelle édition, 1770, 24 liv.

Les Elémens d'Euclide du P. Deſchalles, avec l'uſage de chaque propoſition pour toutes les parties des mathématiques, par M. Audierne, *in*-12. avec 20 planches, 1753, 3 liv. 10 ſ.

Traité de l'Arpentage & du Toisé, ou Méthode facile pour arpenter & mesurer toutes sortes de superficies; avec un nouveau tarif pour le bois de charpente, *in*-12, avec 12 planches, 1758, 3 liv. 10 s.

La Géometrie pratique, contenant la trigonométrie avec un Traité de l'arithmétique par géometrie, *in*-12, avec 12 planches, nouvelle édition, augmentée, 1762, 3 liv. 10 s.

Usage du Compas, de proportion & de l'instrument universel, avec un traité de la division des champs, *in*-12, avec 12 planches, nouvelle édition, 1769, 2 l. 10 s.

Méthode de lever les Plans & les Cartes de terre & de mer, avec toutes sortes d'instrumens & sans instrumens. *in*-12, avec 16 planches, nouvelle édition, 1750, 2 l. 10 s.

De différens Auteurs.

L'Arithmétique en sa perfection, par le Gendre, dern. édit. aug. d'une nouvelle regle d'alliage, *in*-12, 2 l. 10 s.

L'Arithmétique de Barême, ou le livre pour apprendre cette science de soi-même & sans maitre, *in*-12, 1764, 2 liv. 10 s.

Les Comptes faits, où l'on trouve les supputations qui se font par la multiplication pour la valeur de quelque chose que l'on puisse s'imaginer, & à telles sommes qu'elles puissent monter, par Barême, *in*-12, 2 l. 10 s.

Les mêmes, *in* 24, 1 liv. 10 s.

Le Livre nécessaire pour les Comptables, Avocats, Notaires, Procureurs, Trésoriers ou Caissiers, & généralement à toutes sortes de conditions, par Barême, *in*-12, 2 liv. 10 s.

Manuel de l'Arpenteur, où l'on traite de l'arithmétique, des fractions décimales, des proportions, la planimetrie, la trigonométrie, la géodésie, le jaugeage, &c, avec un sommaire alphabétique des termes les plus usités dans l'arpentage, & des tables de réduction, par M. *Ginet*, Arpenteur à la Maîtrise des Eaux & Forêts de l'Isle-de-France, *in*-8°. avec 21 pl. 1770, 6 liv.

Elémens de Mathématiques, ou Traité de la Grandeur en général, qui comprend l'arithmétique, l'algebre, l'analise, par le P. Lamy, huitieme édition, *in*-12, 1765, 3 liv.

Elémens de Géometrie ou de la mesure de l'Etendue, par

le P. Lamy, ſeptieme édit. 1758, *in*-12 *fig.* 3 liv.

Leçons de Géométrie, dictées à l'école royale d'Architecture, par M. Mauduit, Profeſſeur de Mathématique en ladite école, *in*-8°. avec fig. 1770, *ſous preſſe.*

Elémens de Géométrie, avec un Eſſai ſur les *maximis* & les *minimis*; un traité des ſolides réguliers, de la meſure des ſurfaces, & des ſolides; la conſtruction de divers problêmes géométriques, & la trigonométrie rectiligne & ſphérique, traduit de l'Anglois de *T. Simpſon*, nouvelle édition, augmentée d'un tiers, *in*-8°. 1770, *ſous preſſe.*

La Trigonométrie rectligne & ſphérique, avec la nature & l'application des logarithmes, la conſtruction des tables des ſinus, tangentes, & les proportions des triangles, traduit de l'Anglois de *T. Simpſon*, pour ſervir de ſupplément aux précédentes éditions, de ſa Géometrie, *in*-8°. avec fig., 1770, *ſous preſſe.*

Elémens d'Analyſe pratique, ou recueil de problêmes numériques, réſolus par algebre; & de problêmes geométriques, réſolus par algebre & par géométrie. On y a joint un petit traité des Fluxions & de la réſolution des équations, traduit de l'Anglois de *T. Simpſon*, *in*-8°. 1770, avec 9 planches, *ſous preſſe.*

Traité des Equations invariables, par M. J. R. Mourraille de l'Académie des Sciences & Belles Lettres de Marſeille, *in*-4°. avec 17 planches, 1770, 12 liv.

Traité élémentaire de Méchanique & Dynamique, appliqué principalement aux mouvemens des machines, par M. l'Abbé Boſſut, *in*-8°. grand papier, avec figures, 6 liv. 10 ſ.

L'Ecole de l'Officier, contenant une méthode facile & abrégée de lever un plan ſans l'uſage de la Géométrie ordinaire, & un petit traité de la fortification paſſagere, traduit de l'Allemand, par M. le Comte de Bruhl, *in*-8°. enrichi de 9 planches, 1770, *ſous preſſe.*

Dictionnaire Militaire portatif, contenant tous les termes propres à la Guerre, la Tactique, le Génie, l'Artillerie, la Diſcipline des troupes tant ſur mer que ſur terre, quatrieme édition, *in*-8°. 3 vol. 15 liv.

Elémens de l'Art militaire, par feu M. d'Hericourt, nouvelle édition, augmentée, 6 vol. *in*-12 15 liv.

Elémens de l'Art Militaire ancien & moderne, par M. Cugnot, ancien Ingénieur au ſervice de S. M. I. R. A. 2 vol. *in*-12, 1766, avec 12 planches 6 liv.

Suite. La Fortification de Campagne théorique & pratique, ou traité de la science, de la construction, de la défense, de l'attaque des retranchemens, par le même Auteur, *in*-12, avec 12 planches. 1769, 3 liv.

Ecole de Cavalerie, contenant la connoissance, l'instruction & la conservation du cheval, par M. de la Gueriniere, Ecuyer du Roi, *in-fol.* avec fig. 40 liv.

Le même, 2 vol. *in*-8°. avec fig. 1769, 12 liv.

Le même 2 vol. *in*-12, petit format, avec figures. 5 liv.

Commentaires de Messire Blaise de Montluc, Maréchal de France, nouvelle édition, augmentée d'une table des matieres, & de l'explication des mots hors d'usage, 4 vol. *in*-12, 1760, 10 liv.

Mémoires du Duc de Rohan, sur les choses qui se sont passées en France depuis la mort de Henri le Grand, jusqu'à la paix faite avec les Réformés, augmentés de divers discours politiques, & de ses voyages, *in*-12, 4 parties en 2 vol. 6 liv.

Code Militaire, ou Compilation des Ordonnances des Rois de France, concernant les Gens de Guerre, par Briquet, nouvelle édition, *in*-12, 8 vol. 1761, 20 l.

Observations physiques & morales sur l'instinct des animaux, leurs mœurs, leurs usages, leur industrie, traduit de l'Allemand, avec des notes, par M. Robinet, 2 vol. *in*-12, 1770, 5 liv.

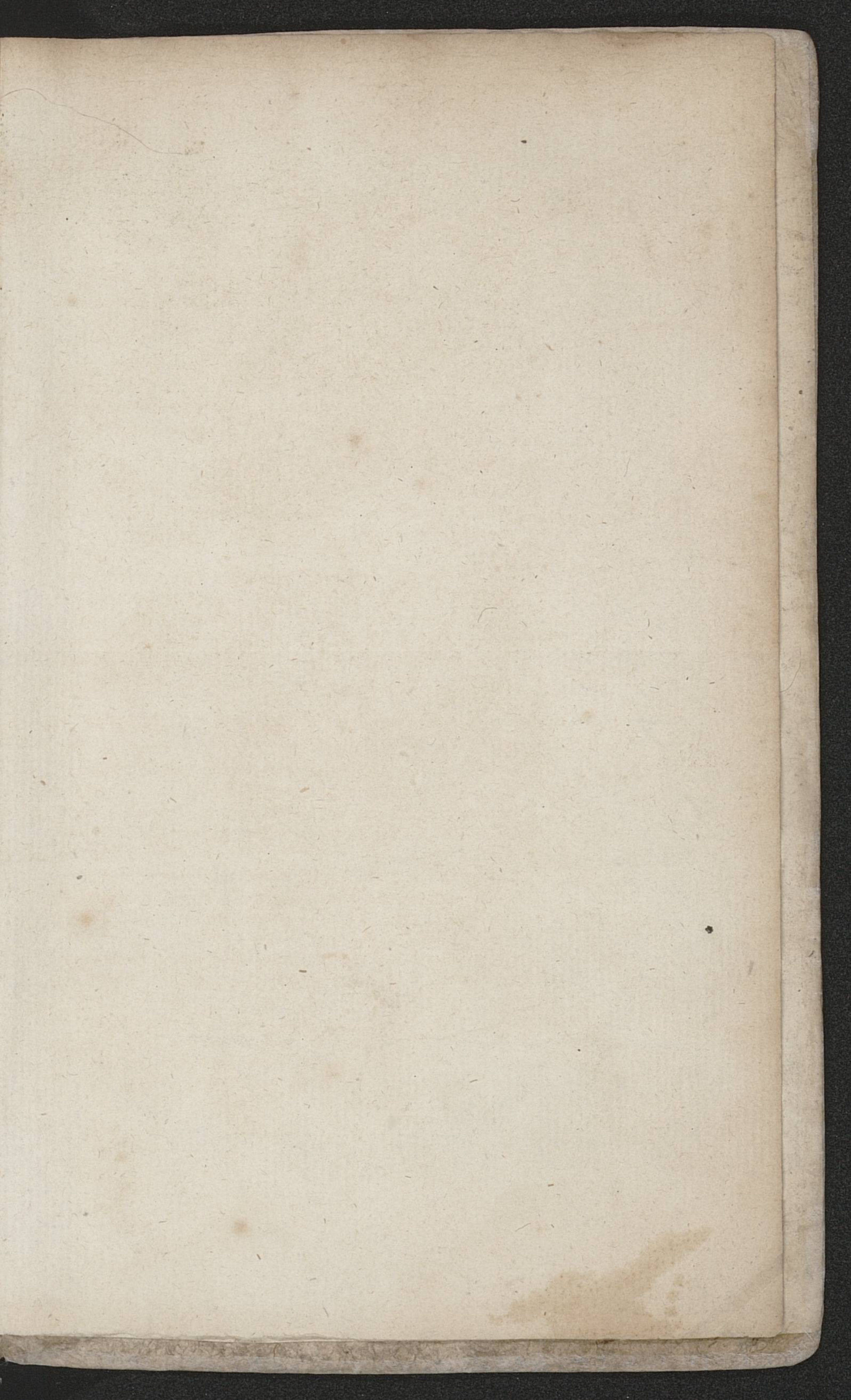
Nouveau Parfait Maréchal, ou la Connoissance générale du cheval, avec un dictionnaire des termes les plus usités dans le manege, par M. de Garsault, *in* 4°. nouvelle édition, 1770, avec figures, 10 liv.

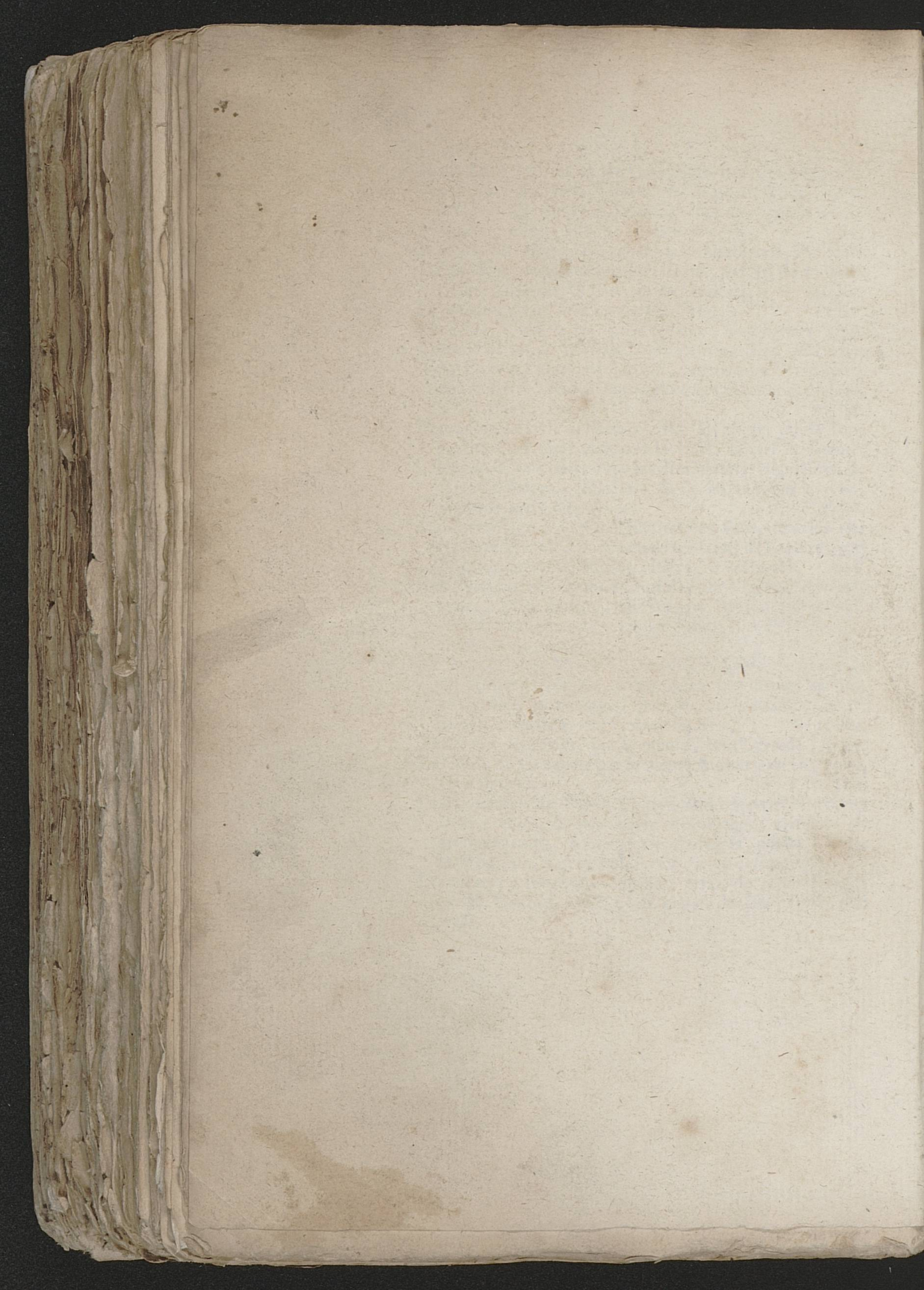
Traité des Voitures, par le même, *in*-4°. *broché*, 6 liv.

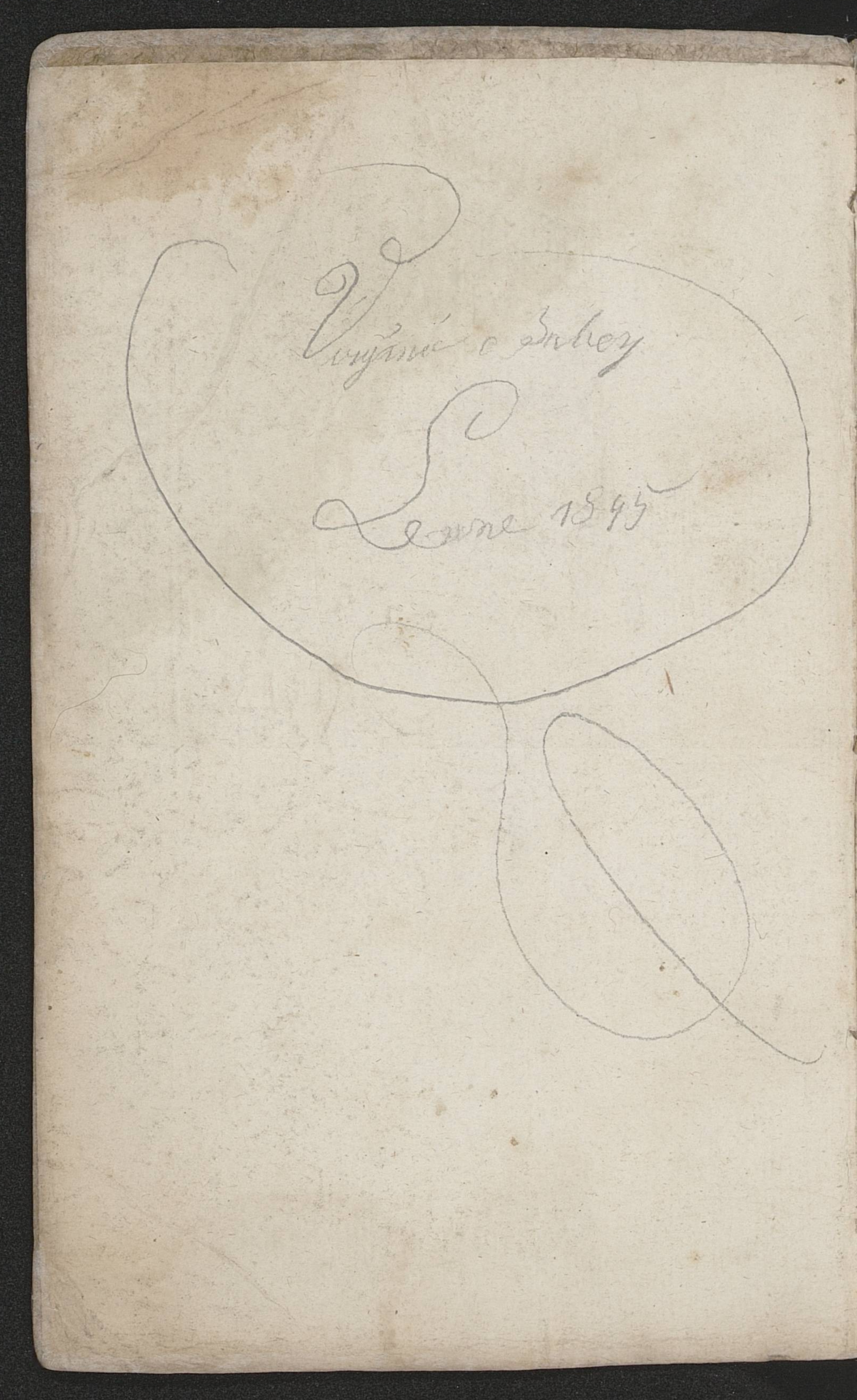
Le Guide du Cavalier, par le même Auteur, *in*-12, 1770, avec figures. 2 liv. 10 s.

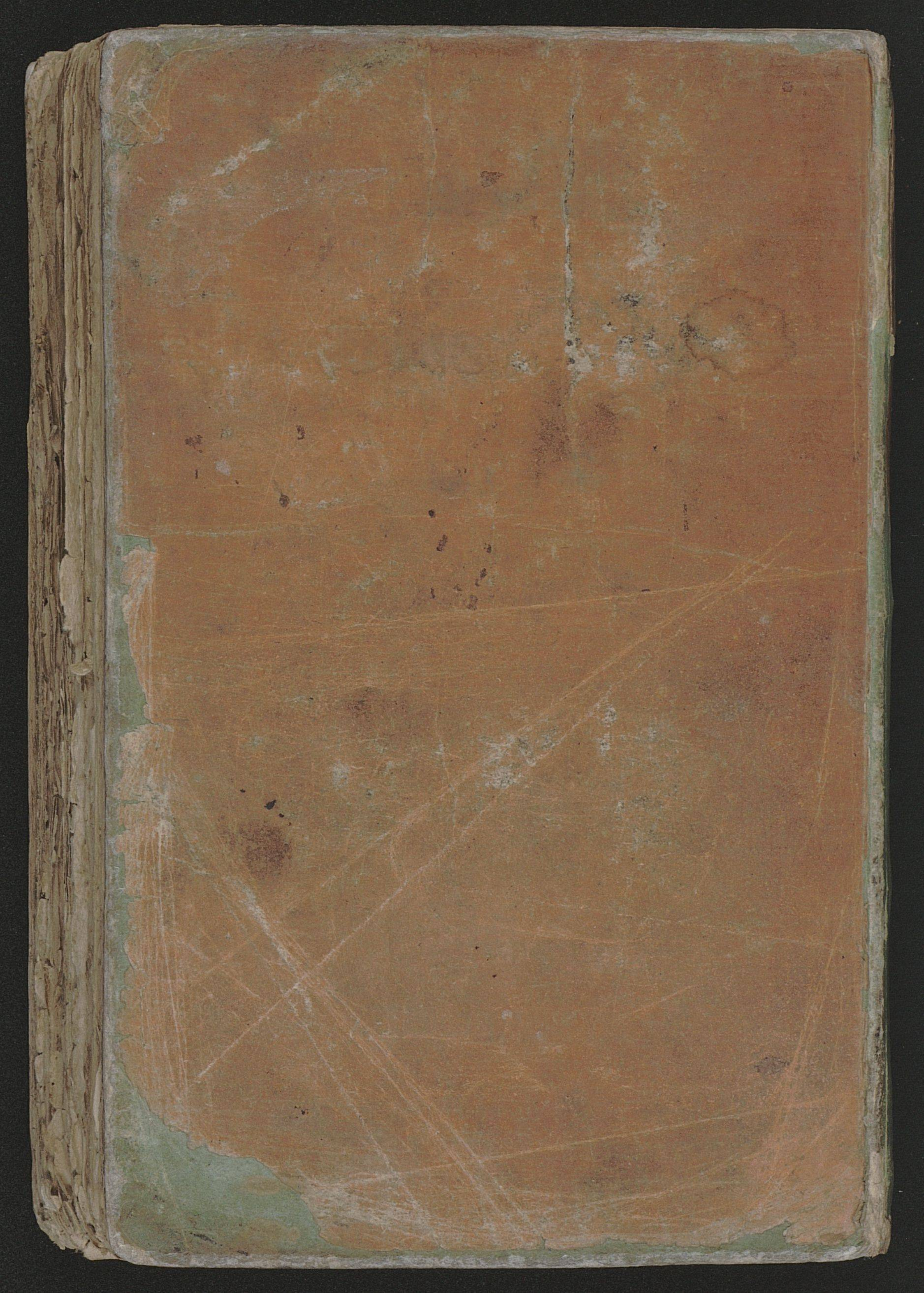
Les Comédies de Terence, traduction nouvelle, avec le latin à côté, & des notes historiques, critiques & grammaticales, à l'usage des Colléges, par M. l'Abbé le Monnier, 2 gros vol. *in*-12, 1770, *sous presse*.

Les mêmes, très-belle édition, ornée de sujets dessinés par M. Cochin, *in*-8°. 3 vol. papier double, 1770, *sous presse*.






1845



OZANAN
RECREAT:
PHISIQUE
TOM 1
N 22



inches 4 3 2 1 0 | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 centimeters

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	18.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

	16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
L*	49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87
a*	-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17
b*	0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46
Density	0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42									

D50 Illuminant, 2 degree observer

Density ⟶

Golden Thread

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams